Grandezze scalari e vettoriali-Esempi

- Massa
- Tempo
- Temperatura
- Pressione
- Posizione lungo un asse (linea)
- Volume
- Lavoro
- Energia

- Posizione nel piano
- Posizione nello spazio
- Velocità
- Accelerazione
- Forza
- Quantità di moto
- Impulso
- Momento della quantità di moto

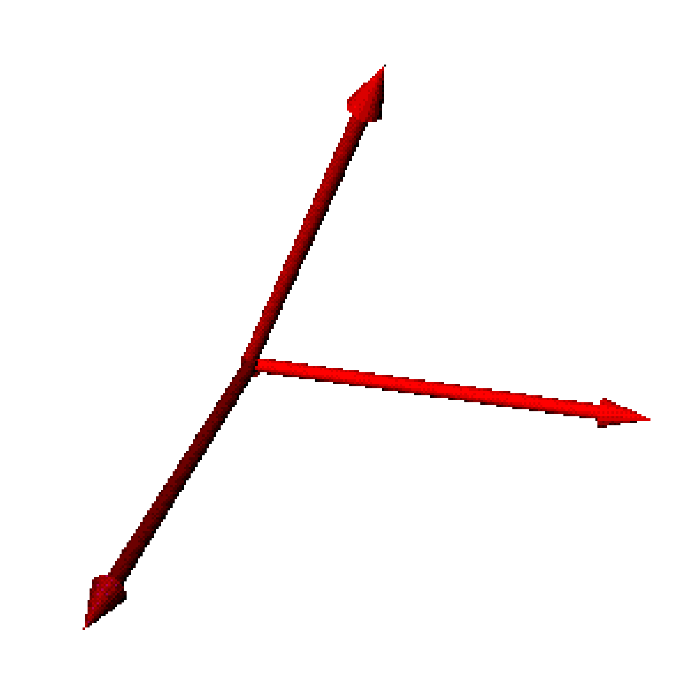
Grandezze scalari e vettoriali-Esempi

- Massa, lunghezza, temperatura: grandezze <u>scalari</u>.
- Spostamento, velocità: grandezze <u>vettoriali</u>.

- Quanto veloce? ***Modulo*** (lunghezza del segmento).
- In quale direzione? ***Direzione*** (retta su cui giace).
- Con quale verso? ***Verso*** (orientamento)

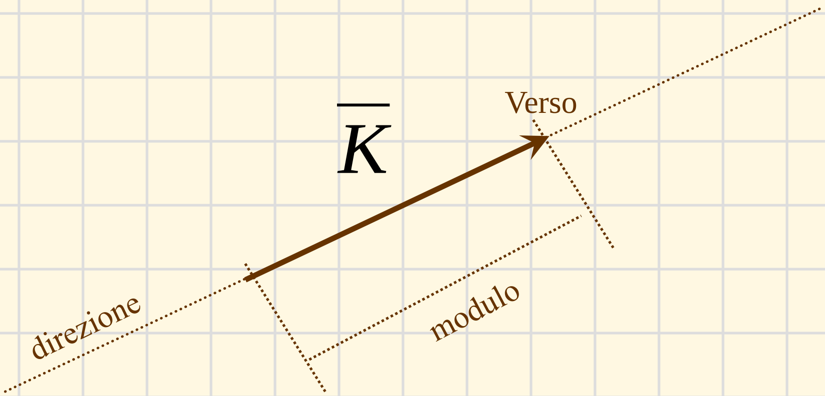
Grandezze scalari e vettoriali

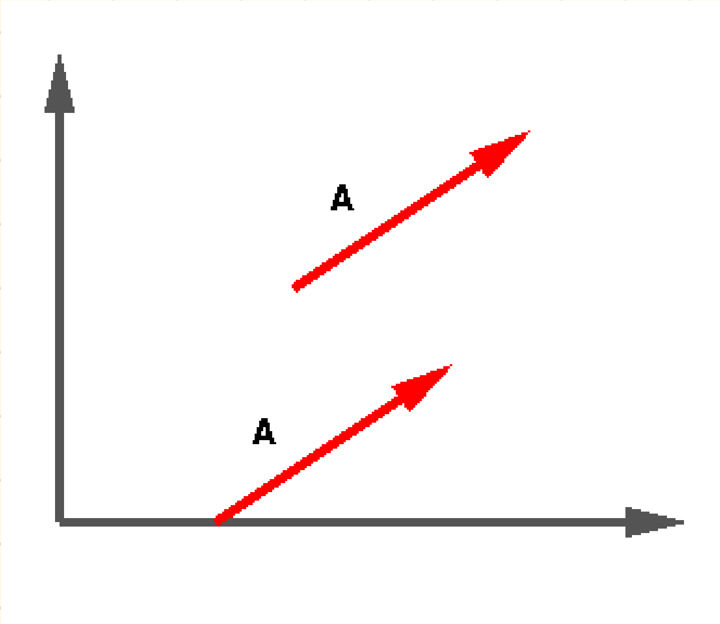
- Al contrario delle **grandezze scalari** per le quali è sufficiente un semplice numero (e relativa unità di misura) per rappresentarle in maniera completa, per le **grandezze vettoriali** oltre al numero (e alla relativa unità di misura), che rappresenta il modulo (l'intensità) della grandezza, è necessario specificare anche la direzione ed il verso.



I vettori

- Quando si ha a che fare con un problema in fisica conviene sempre fare un disegno, uno schizzo.
- Un vettore si rappresenta con una freccia per indicare la direzione ed il verso del vettore. La lunghezza della freccia rappresenta invece il modulo del vettore.
- Vettori paralleli (stesso verso e stessa direzione) e con lo stesso modulo sono uguali.





I vettori-Notazione

- Per indicare un vettore si può, alternativamente ed indifferentemente fare ricorso ad una delle seguenti notazioni

$$\overline{\mathrm{K}}, \vec{\mathrm{K}}, \mathbf{K}$$

- Per indicare il modulo di un vettore si può, alternativamente ed indifferentemente fare ricorso ad una delle seguenti notazioni

$$\left|\overline{\mathrm{K}}\right|, \left|\vec{\mathrm{K}}\right|, \mathrm{K}$$

I vettori-Operazioni

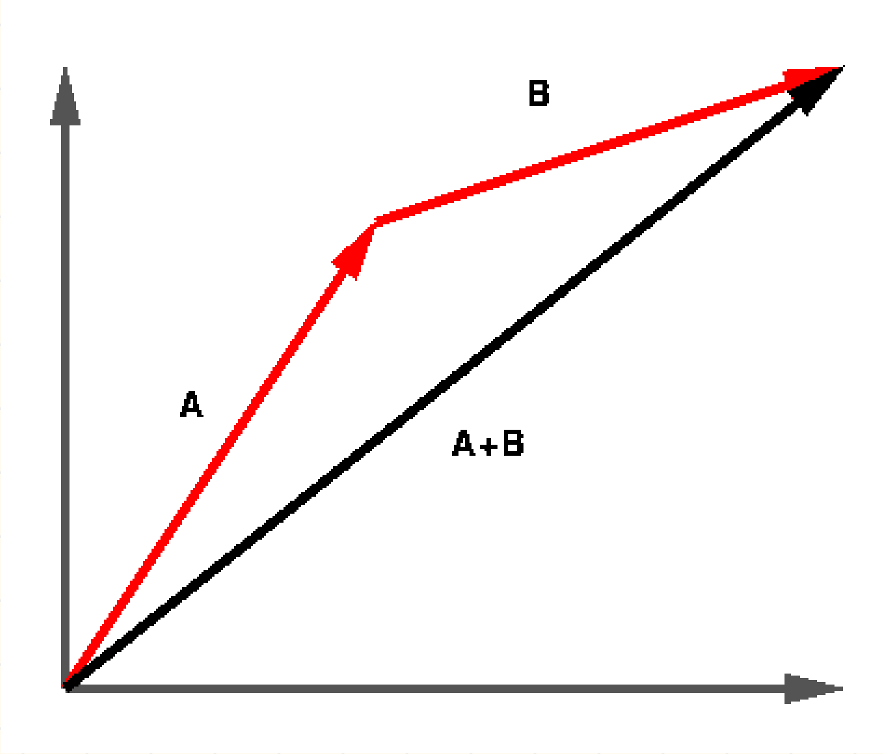
- Deve essere possibile definire delle operazioni di somma (algebrica) e prodotto per i vettori.
- Esiste una branca della matematica che se ne occupa (algebra vettoriale). Per la fisica che trattiamo in questo corso serve solo un sottoinsieme di tutte le operazioni che si possono definire.
- Si ha un tipo di somma algebrica:

vettore + vettore → *Risultato:* vettore

- Si hanno quattro diversi tipi di prodotto:
- 1) Prodotto vettore per numero: scalare vettore → *Ris.:* vettore
- 2) Prodotto **<u>Scalare:</u>** vettore • vettore → *Ris.:* scalare
- 3) Prodotto **<u>Vettoriale:</u>** vettore × vettore → *Ris.:* vettore
- 4) Prodotto **<u>Tensoriale:</u>** vettore ⊗ vettore → *Ris.:* tensore
- Il quarto tipo di prodotto non sarà utilizzato!

Somma di due vettori

- Regola del parallelogramma
- Si riporta il primo vettore, a partire dalla fine del primo vettore si riporta il secondo.
- Il vettore somma si ottiene congiungendo il punto iniziale del primo vettore con quello finale del secondo vettore
- La somma è commutativa, si può invertire il primo vettore con il secondo

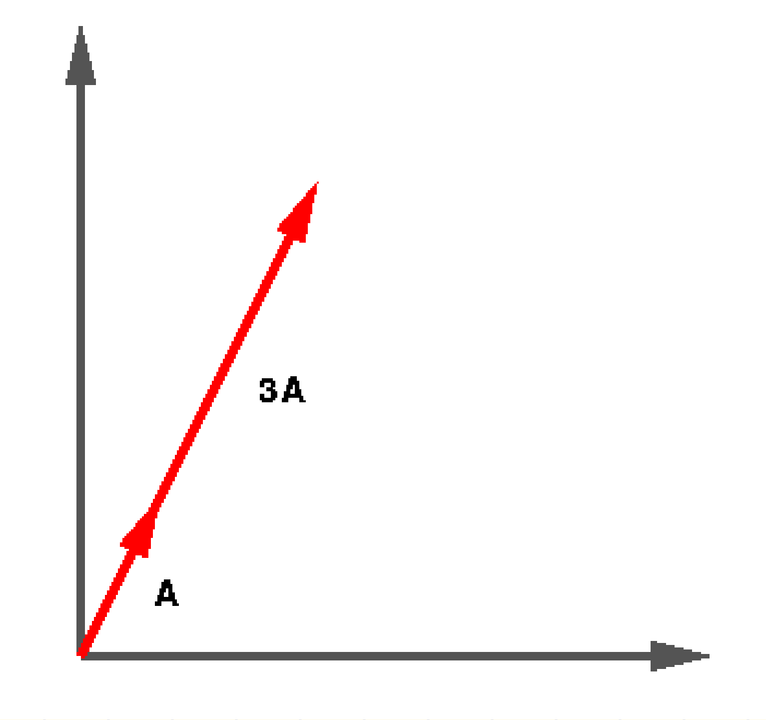


Differenza di due vettori

- La differenza tra un vettore **A** ed un vettore **B**, è uguale, sulla base di quanto visto per la somma tra vettori, alla somma del vettore **A** e del vettore **–B** (ottenuto da **B** mantenendo inalterata la direzione ed il modulo ma cambiandone il verso)

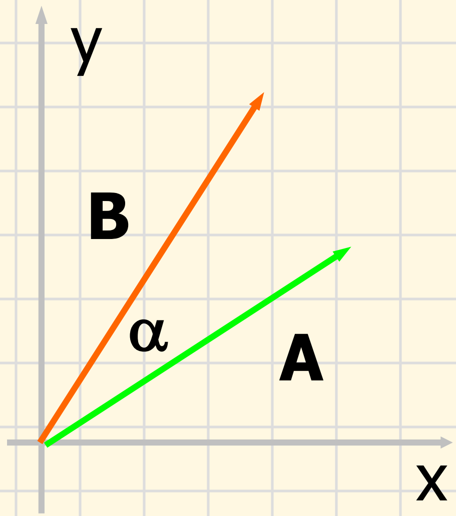
Prodotto di uno scalare per un vettore

- Dato un vettore **A** ed uno scalare (numero, esempio 3), si definisce prodotto tra lo scalare ed il vettore **A**, il vettore avente stessa direzione di **A** ed avente modulo pari al prodotto dello scalare per il modulo del vettore **A**
- Se lo scalare è un numero positivo il verso del vettore risultante sarà concorde al verso di **A**, altrimenti sarà discorde



Prodotto scalare di vettori

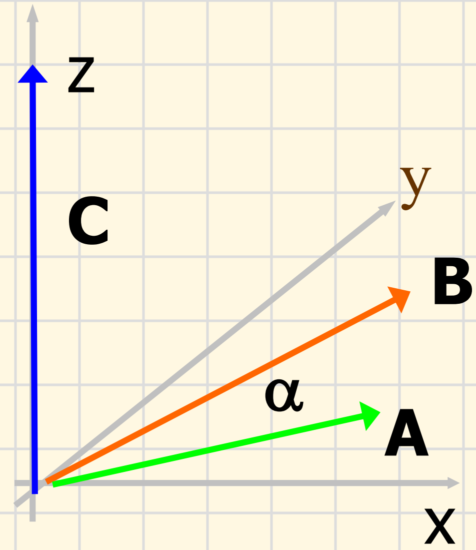
- Si definisce prodotto scalare tra i vettori **A** e **B**, lo scalare dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\alpha)$$

- Prodotto scalare nullo se i due vettori sono ortogonali

Prodotto vettoriale di vettori



- Si definisce prodotto vettoriale tra i vettori **A** e **B**, il vettore avente **modulo** pari al prodotto dei moduli dei due vettori per il seno dell'angolo compreso tra i due vettori, per **direzione** quella ortogonale al piano definito dai due vettori e per **verso** quello definito dalla prima regola della mano destra

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}\mathrm{x}\mathbf{B}| = |\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot \mathrm{sen}(\alpha)$$

- Prodotto vettoriale nullo se i due vettori sono paralleli
- Il prodotto vettoriale non è commutativo $\mathbf{A}\mathrm{x}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathrm{x}\mathbf{A}$

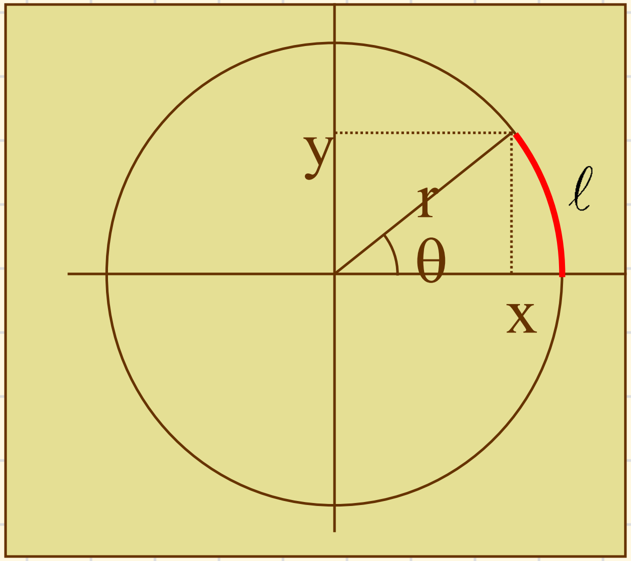
Richiami di trigonometria

$$\theta = \frac{\ell}{r}$$

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

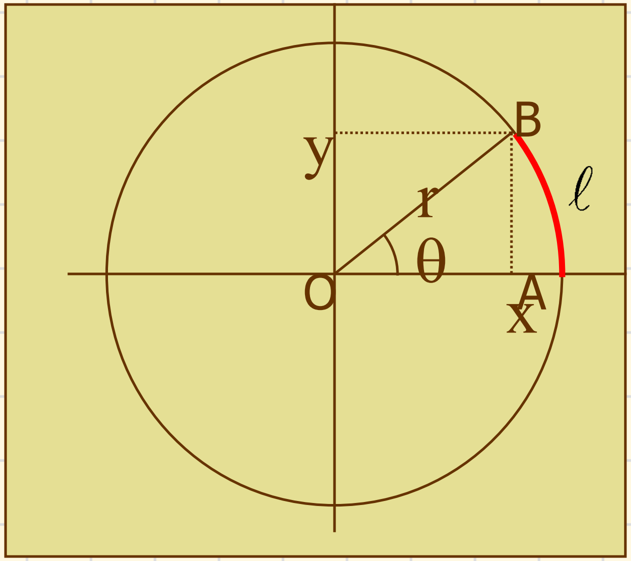
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}$$



Gli argomenti delle funzioni seno, coseno e tangente sono numeri senza dimensioni. Anche il valore della funzione è un numero adimensionale

Relazioni trigonometriche -1

- Una delle relazioni più importanti è: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- Essa può essere dimostrata applicando il teorema di Pitagora la triangolo OAB

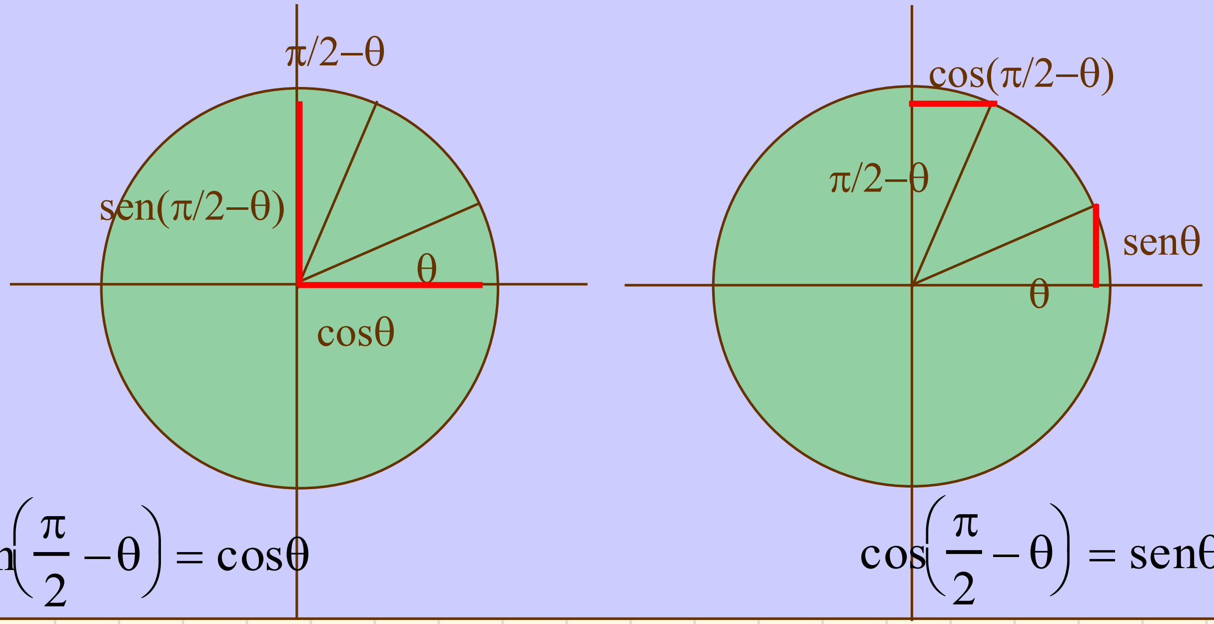


$$\ell_{OA}^2 + \ell_{AB}^2 = r^2$$

$$\text{ma} \quad \ell_{OA} = r\cos\theta \quad \text{e} \quad \ell_{AB} = r\operatorname{sen}\theta$$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2$$

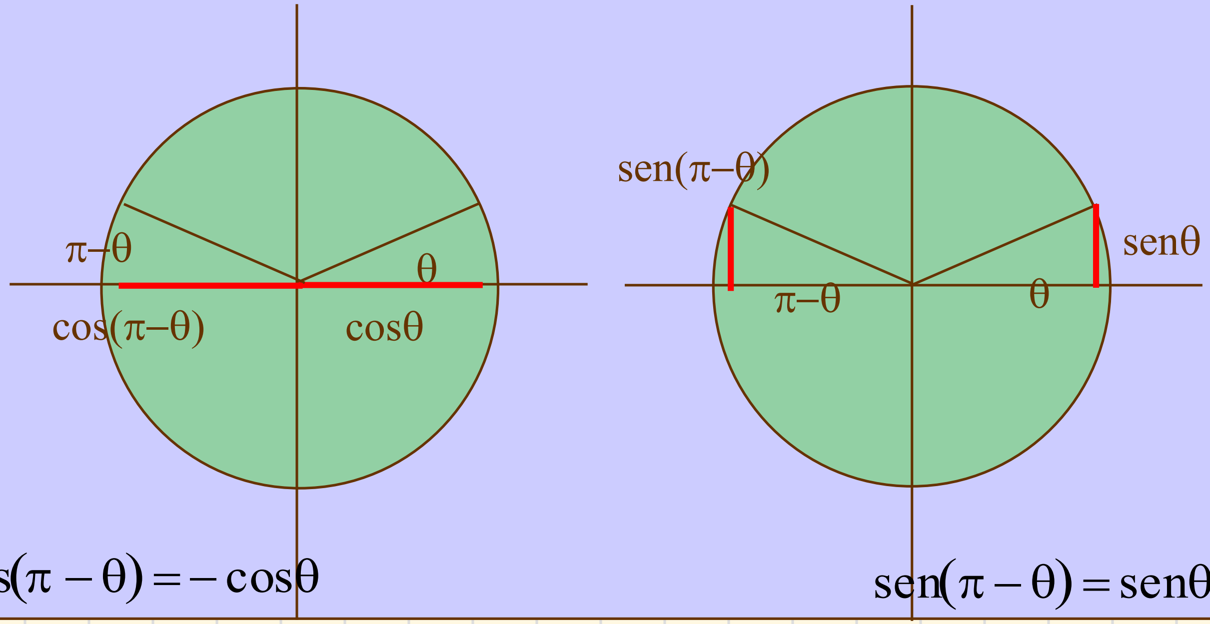
Relazioni trigonometriche - 2



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta$$

Relazioni trigonometriche - 3



$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta$$

Somma di angoli

$$\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\, \mathrm{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \mathrm{sen}\alpha\, \mathrm{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \mathrm{sen}\alpha\, \mathrm{sen}\beta$$

$$\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha\, \mathrm{sen}\beta$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$$

$$\mathrm{sen}(2\alpha) = 2\,\mathrm{sen}\alpha \cos\alpha$$

Formule di bisezione

- Partendo dalle formule di duplicazione

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\Rightarrow$$
$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Sistema di riferimento su una retta

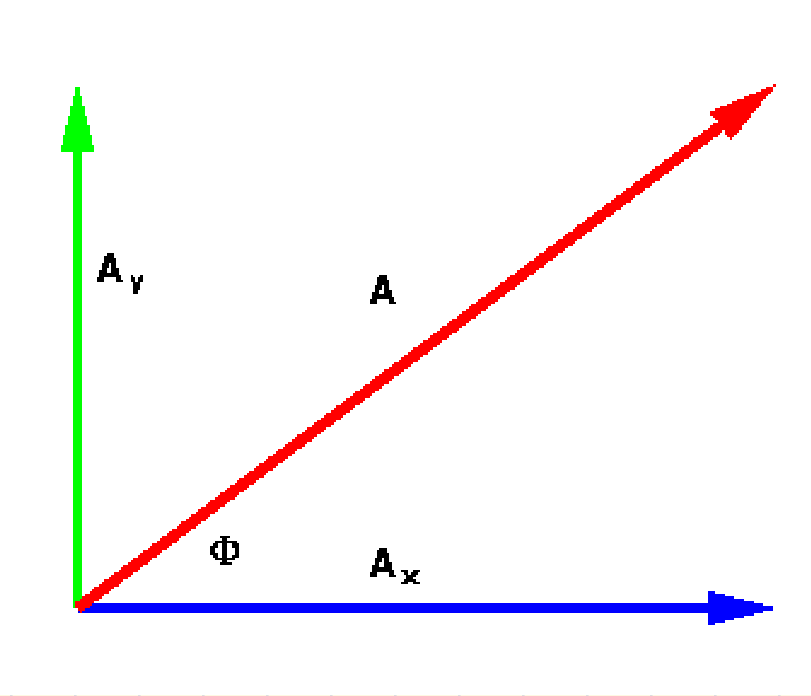
- Per definire un asse di riferimento occorre:
  - fissare l'origine
  - fissare il verso positivo
- La posizione (coordinata) x del punto P sarà
  - La distanza di P dall'origine O se P viene dopo O percorrendo l'asse nel verso fissato
  - Meno la distanza di P dall'origine O se P viene prima di O percorrendo l'asse nel verso fissato

Sistema di riferimento nel piano - 1

- Occorrono due assi cartesiani (ortogonali) (stessa origine)
  - L'asse x deve ruotare di 90° in senso antiorario per sovrapporsi all'asse y
- Il punto P nel piano sarà individuato dalle coordinate x, y, che sono le coordinate dei punti proiezione di P rispettivamente sugli assi x e y
- I punti proiezioni P_x e P_y si ottengono mandando le perpendicolari da P rispettivamente agli assi x ed y

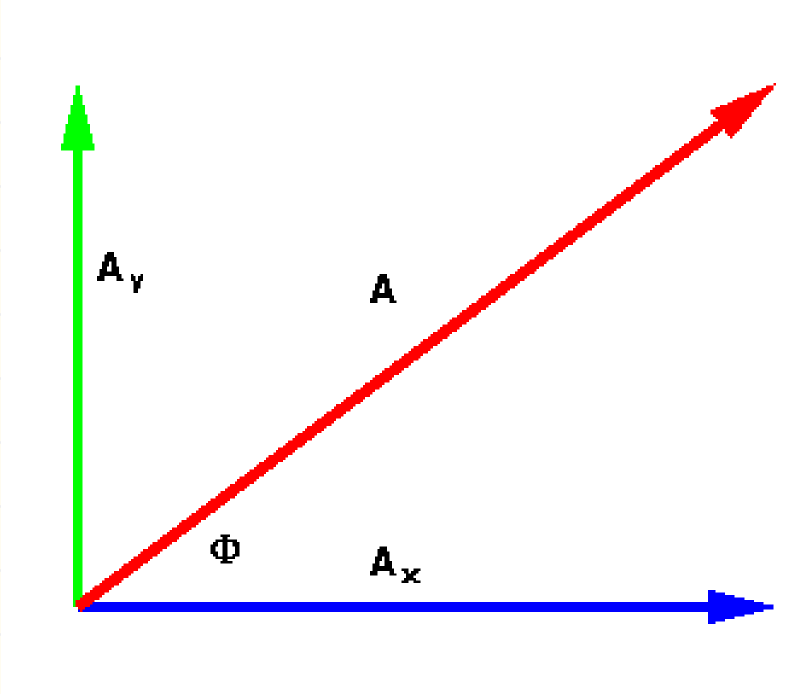
Vettori componenti di un vettore

- Qualunque vettore **A** può essere pensato come somma di due vettori $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$, il primo parallelo all'asse x, il secondo all'asse y
- $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$ sono i vettori componenti di **A.**
- Nello spazio i vettori componenti sono tre: $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ e $\mathbf{A}_z$



Componenti cartesiane di vettori

- A_x = + (più) il modulo del vettore componete $\mathbf{A}_x$ se $\mathbf{A}_x$ è concorde con l'asse x
- A_x = - (meno) il modulo di $\mathbf{A}_x$ se il verso di $\mathbf{A}_x$ è opposto all'asse x
- Analogo discorso per A_y

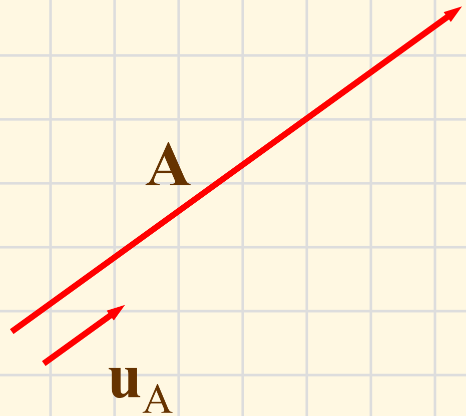


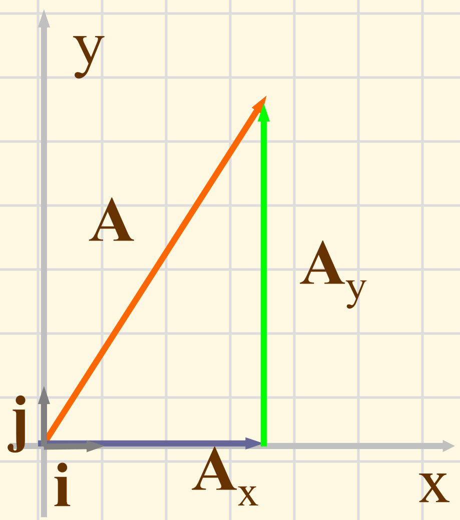
$$A_x = A\cos(\Phi)$$

- Dove A= modulo di **A**
- Φ angolo tra **A** e l'asse x

Versori

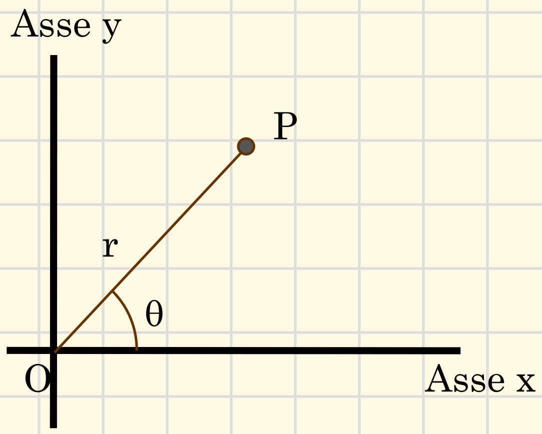
- I versori sono vettori aventi modulo unitario
- I versori non hanno dimensioni
- Se $\mathbf{u}_A$ è il versore del vettore **A,** allora $\mathbf{A}=A\mathbf{u}_A$
- I versori degli assi x,y,e z si chiamano rispettivamente: **i**, **j** (e **k**), oppure $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ e $\mathbf{u}_z$.
- $\mathbf{A}_x=A_x\mathbf{i}$
- $\mathbf{A}_y=A_y\mathbf{j}$
- $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x+ \mathbf{A}_y= A_x\mathbf{i}+ A_y\mathbf{j}$

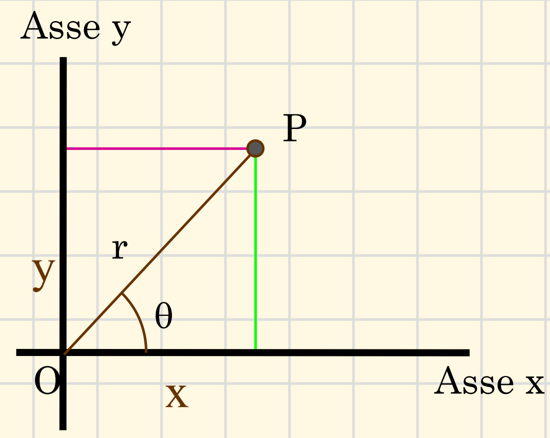




Sistema di riferimento nel piano - 2

- La posizione di P nel piano può essere specificata in coordinate polari (r,θ)
- r è la distanza di P dall'origine del sistema di riferimento. (r è un numero reale positivo)
- θ è l'angolo formato dal segmento OP con un asse arbitrariamente fissato nel piano
  - Nella figura è stato scelto l'asse x come asse di riferimento.
  - L'angolo θ è positivo se l'asse di riferimento deve ruotare in verso antiorario per sovrapporsi ad P.





Sistema di riferimento nello spazio

- Nello spazio occorrono tre assi orientati, x,y,z, ortogonali tra di loro.
  - Si usano terne destrorse, cioè con l'asse x disposto secondo il pollice, l'asse y secondo l'indice, e quello z secondo il medio della mano destra.