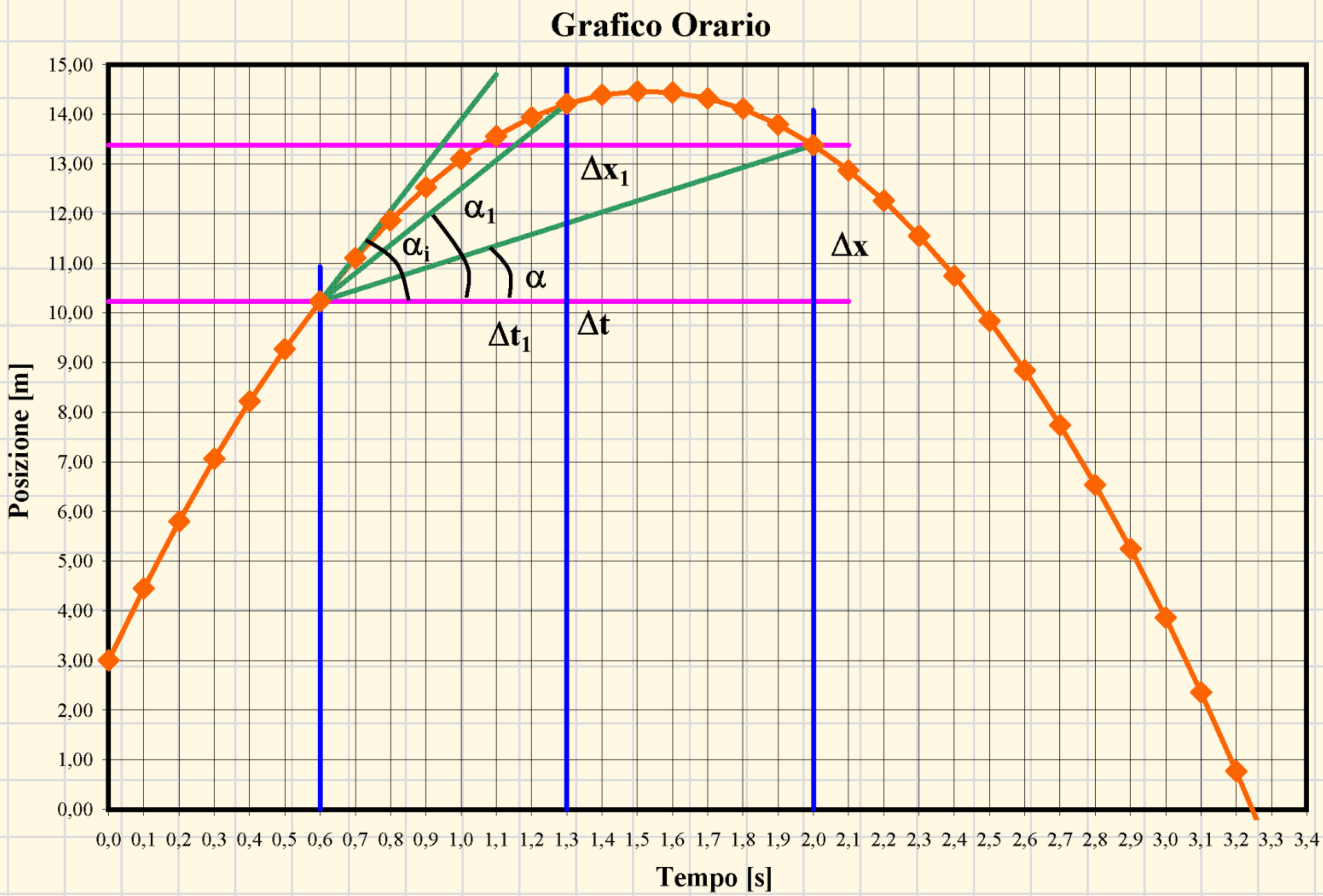
Velocità istantanea

- Al diminuire dell'intervallo di tempo Δt , fissato il tempo t_0, la velocità tende ad un valore limite.
- Riducendo a zero l'ampiezza dell'intervallo di tempo equivarrebbe a determinare la velocità del punto materiale al tempo t_0 ovvero si determinerebbe la **velocità istantanea** al tempo t_0 che si definisce:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t \equiv t_0}$$

- cioè la derivata della funzione $x=x(t)$ calcolata al tempo t_0, fornisce il valore della velocità in corrispondenza dell'istante di tempo specificato.
- Dalle proprietà della derivata segue che la velocità istantanea al tempo t_0 rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva $x=x(t)$ tracciata al tempo t_0.

Velocità istantanea



Velocità istantanea in ogni istante

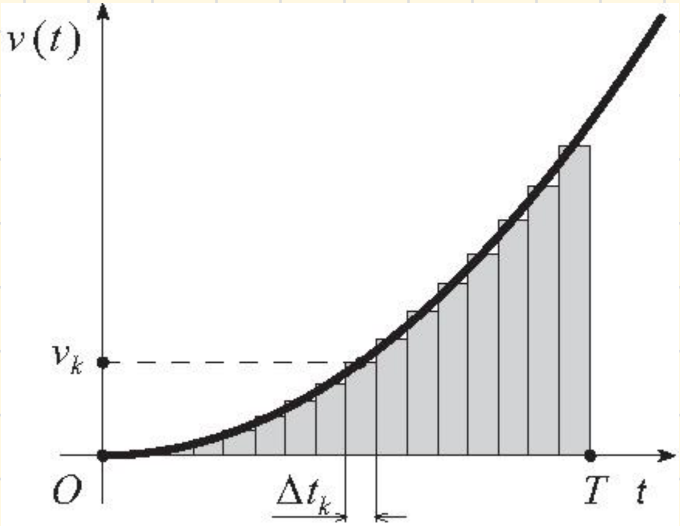
- Ripetendo l'operazione di limite per altri istanti di tempo possiamo conoscere la velocità istantanea e, quindi, la derivata rispetto al tempo della funzione x(t) per ciascun istante
- Se ripetiamo l'operazione per tutti gli istanti di tempo dell'intervallo di osservazione del moto possiamo ricavare la velocità istantanea in funzione del tempo **v(t)**
- Questa ultima funzione altro non è se non la derivata rispetto al tempo della funzione x(t) ovvero **v(t)=D'x(t)**

Determinazione dello spostamento

- Il problema inverso di stabilire lo spostamento **S** di un punto materiale in moto con velocità v in un tempo T, è banale se v è costante. In questo caso: $\mathbf{S} = v \cdot T$
- Tuttavia qualora v fosse funzione del tempo, tale espressione non condurrebbe ad un risultato corretto.
- Per risolvere (o, quanto meno ridurre) l'errore si può pensare di dividere l'intervallo T in tanti intervalli Δt_k e calcolare lo spostamento complessivo **S** nel tempo T come somma dei vari spostamenti subiti dal punto materiale in ogni singolo intervallo Δt_k : $\mathbf{S} \approx \sum_k v_k \cdot \Delta t_k$
- dove v_k può essere considerata costante nell'intervallo Δt_k e presa pari, ad esempio, al valore assunto al centro dell'intervallo k−esimo $v_k \equiv v\left(t_k - \frac{\Delta t_k}{2}\right)$

Determinazione dello spostamento

- Aumentando il numero n di intervalli, cioè diminuendo la durata di ciascun intervallo dal punto di vista geometrico, il prodotto $v_k \cdot \Delta t_k$ rappresenta l'area del rettangolo di base Δt_k e di altezza pari al valore assunto dalla velocità v(t) al centro dell'intervallo Δt_k stesso.
- Pertanto la somme di tutti i prodotti $v_k \cdot \Delta t_k$ costituiscono un'approssimazione dell'area sottesa dalla funzione v(t) nell'intervallo (0,T).



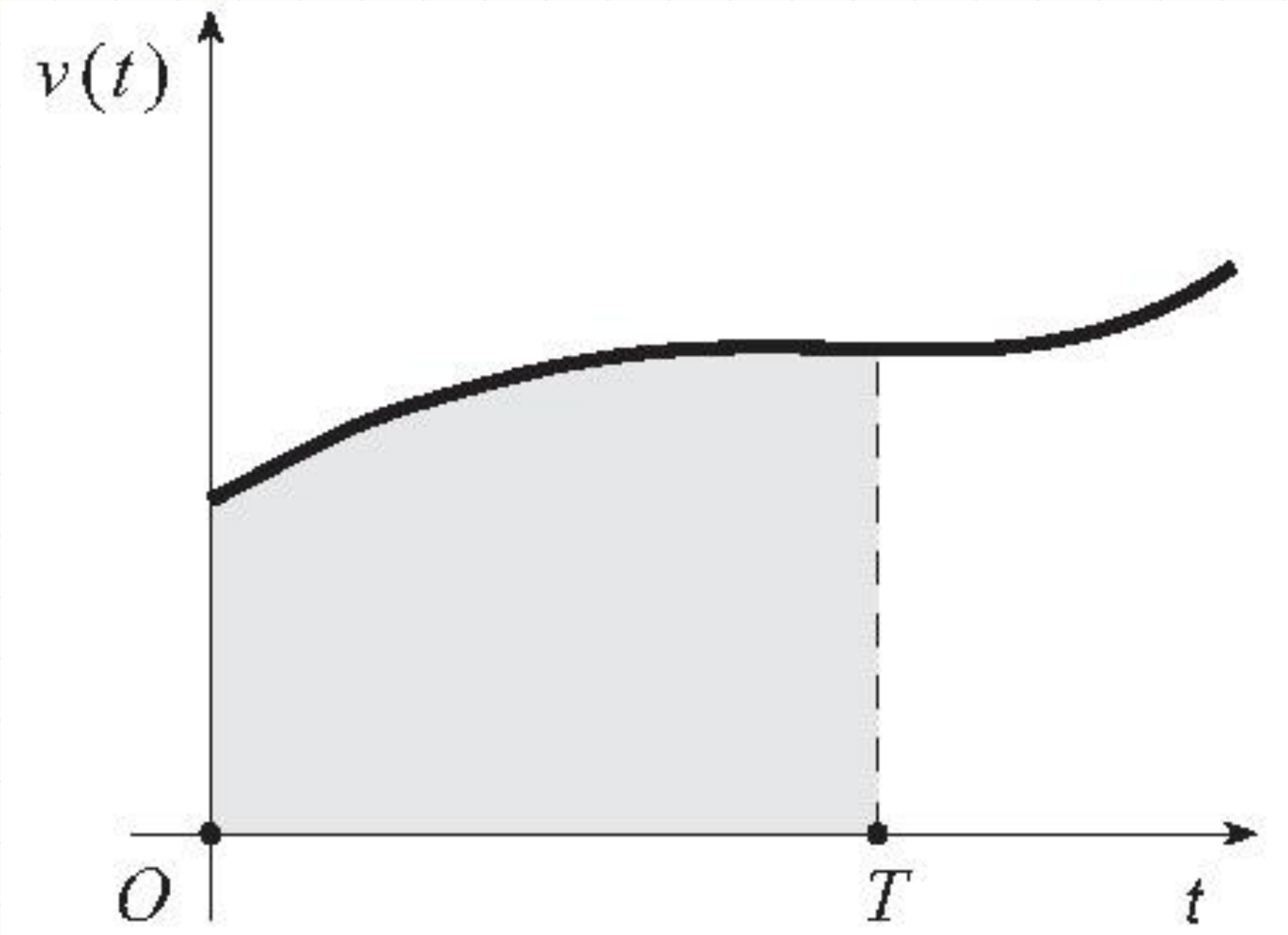
Determinazione dello spostamento

- Analogamente a quanto visto nel caso della velocità istantanea, al diminuire della durata degli intervalli Δt_k in cui è diviso l'intervallo di tempo (0,T), lo spostamento **S** tende ad un valore limite:

$$S = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_k v_k \cdot \Delta t_k = \int_0^T v(t)dt$$

- cioè l'integrale della funzione v=v(t) calcolato dall'istante di tempo iniziale t=0 a quello finale t=T, fornisce l'entità dello spostamento che subisce il punto materiale nell'intervallo (0,T).
- Dalle proprietà dell'integrale segue che lo spostamento subito tra due istanti di tempo è pari all'area sottesa dalla curva v=v(t) tra gli istanti specificati.

Determinazione dello spostamento



Relazione velocità - spostamento

- La relazione tra velocità e spostamento può essere ricavata a partire dalla definizione della velocità istantanea $v = dx/dt \Rightarrow dx = v \cdot dt$
- Integrando ambo i membri: $\int_{x_0}^{x} d\xi = \int_{t_0}^{t} v \cdot d\zeta$ con $x_0=x(t_0)$ la posizione del punto materiale al tempo t_0.
- Applicando la definizione di integrale al primo membro si ha: $\int_{x_0}^{x} d\xi = \lim_{\Delta\xi_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\xi_k$ se poniamo $\Delta\xi_k = \frac{x - x_0}{n}$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} d\xi = \lim_{\Delta\xi_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\xi_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_0}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \left(\frac{x - x_0}{n} \right) \right] = x - x_0$$

quindi $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v \cdot d\zeta$

Moto rettilineo uniforme

- Quando la velocità è indipendente dal tempo, il moto è detto uniforme.
- In generale, la velocità dipende dal tempo, così, per completare la caratterizzazione del moto è necessario conoscere come essa varia istante per istante.
- Così come al variare della posizione di un punto materiale con il tempo ci siamo chiesti con quale velocità tale posizione cambi, allo stesso modo, se la velocità di un punto materiale cambia con il tempo, possiamo chiederci con che rapidità tale velocità cambi.

Accelerazione media

- Sia $v_1 \equiv v(t_1)$ e $v_2 \equiv v(t_2)$ la velocità del punto P rispettivamente, negli istanti di tempo t_1 e t_2; definiamo accelerazione media nell'intervallo di tempo t_2-t_1 il rapporto

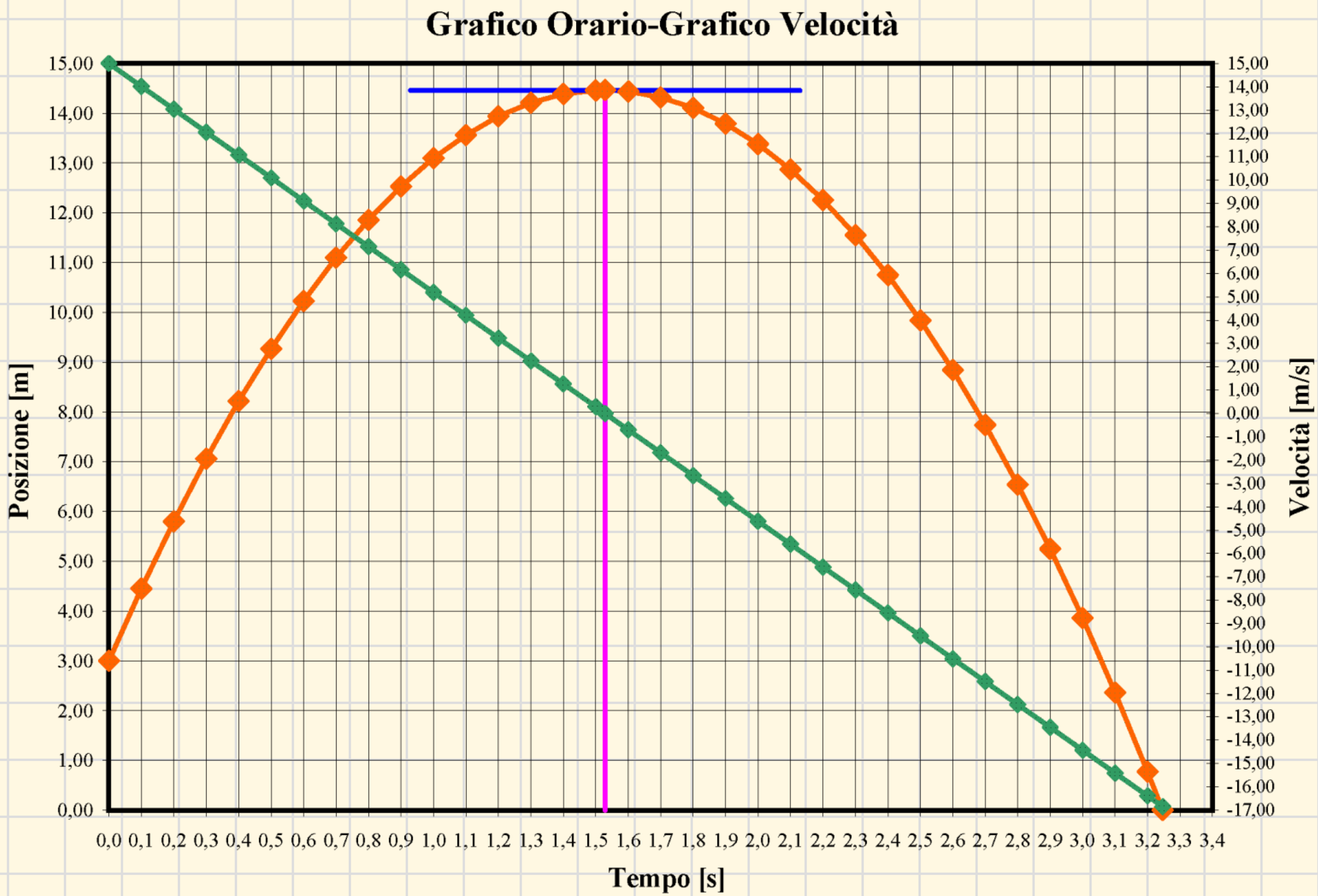
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- L'accelerazione media fornisce un'indicazione complessiva circa il moto del punto P nell'intervallo di tempo Δt non consentendo, tuttavia, una determinazione del valore assunto dall'accelerazione in corrispondenza di uno specifico istante.

Grafico della velocità istantanea

- Se osserviamo il grafico orario del moto che abbiamo utilizzato per studiare la velocità media e istantanea, osserviamo che la pendenza della retta tangente nei diversi punti del grafico stesso cambia al variare del punto considerato.
- Questo implica, ovviamente, che la velocità cambia da punto a punto
- In particolare la velocità inizialmente maggiore di zero decresce fino ad annullarsi (sommità del grafico = tangente orizzontale) per poi divenire minore di zero ed aumentare nuovamente in valore assoluto

Grafico della velocità istantanea



Accelerazione media

- L’accelerazione media non consente di caratterizzare completamente il moto tra due istanti di tempo, non permettendo di stabilire il valore che assume l’accelerazione in corrispondenza di un particolare istante di tempo compreso nell’intervallo considerato.
- Tuttavia si può pensare di applicare il procedimento di calcolo della accelerazione media ad intervalli Δt di ampiezza via via decrescenti, al cui interno è contenuto l’istante in cui si vuole stabilire il valore della accelerazione.

Accelerazione istantanea

- Al diminuire dell'intervallo di tempo Δt , fissato il tempo t_0, l'accelerazione tende ad un valore limite.
- Riducendo a zero l'ampiezza dell'intervallo di tempo equivarrebbe a determinare l'accelerazione del punto materiale al tempo t_0 ovvero si determinerebbe la **accelerazione istantanea** al tempo t_0:

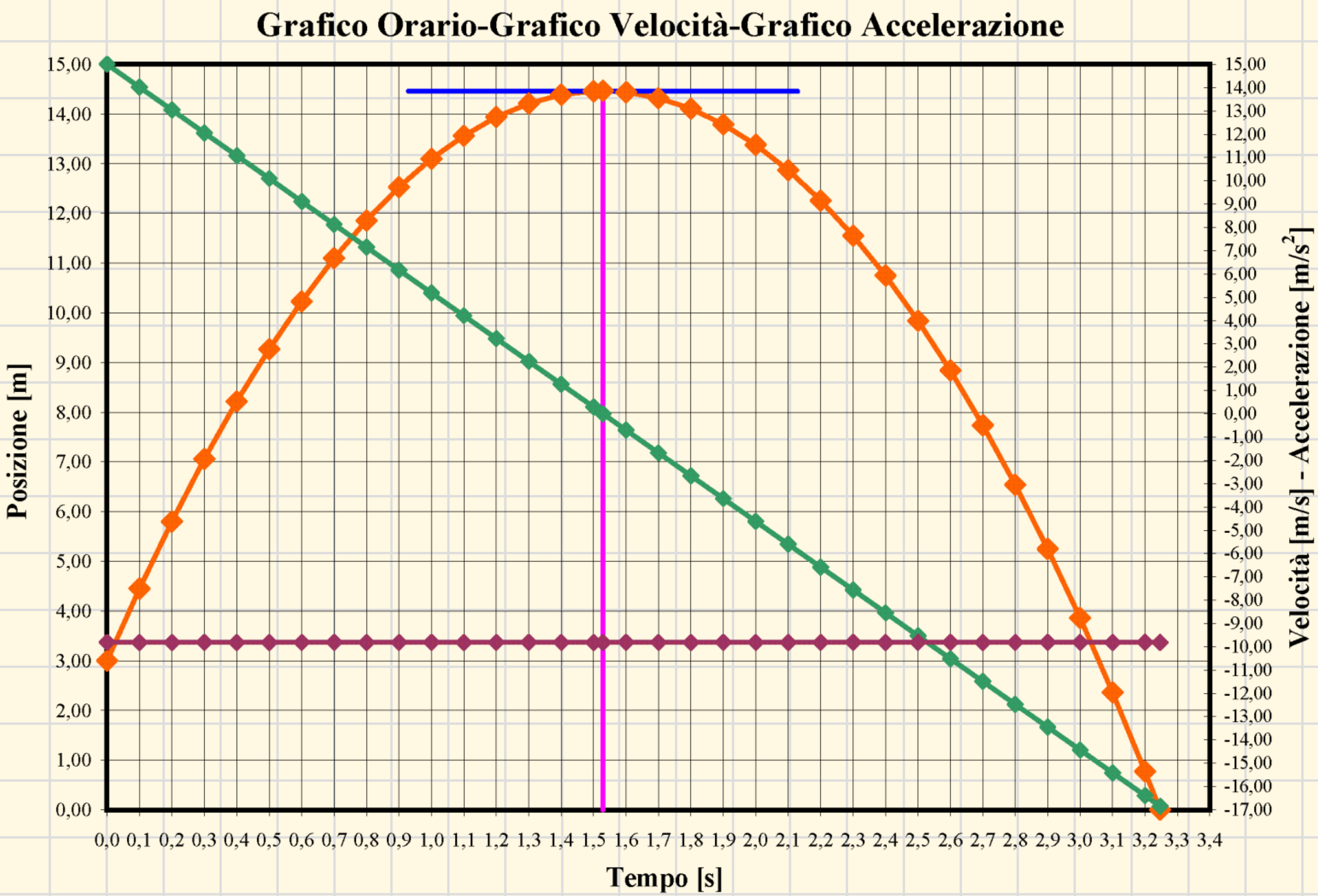
$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t \equiv t_0}$$

- cioè la derivata della funzione $v=v(t)$ calcolata al tempo t_0, fornisce il valore dell'accelerazione in corrispondenza dell'istante di tempo specificato.
- Se la velocità aumenta nel tempo, $a=dv/dt>0$, e il moto si dice, genericamente, accelerato; se la velocità diminuisce nel tempo, $a=dv/dt<0$, e il moto si dice decelerato

Accelerazione istantanea in ogni istante

- Ripetendo l'operazione di limite per altri istanti di tempo possiamo conoscere l'accelerazione istantanea e, quindi, la derivata rispetto al tempo della funzione v(t) per ciascun istante
- Se ripetiamo l'operazione per tutti gli istanti di tempo dell'intervallo di osservazione del moto possiamo ricavare l'accelerazione istantanea in funzione del tempo **a(t)**
- Questa ultima funzione altro non è se non la derivata rispetto al tempo della funzione v(t) ovvero **a(t)=D'v(t)** e, ricordando che v(t)=D'x(t), **a(t)=D''x(t)**

Grafico dell’accelerazione istantanea



Relazione accelerazione - velocità

- La relazione tra accelerazione e velocità può essere ricavata a partire dalla definizione dell'accelerazione istantanea $a = dv/dt \Rightarrow dv = a \cdot dt$
- Integrando ambo i membri: $\int_{v_0}^{v} d\eta = \int_{t_0}^{t} a \cdot d\zeta$ con $v_0=v(t_0)$ la velocità del punto materiale al tempo t_0.
- Siccome $\int_{v_0}^{v} d\eta = v - v_0$, sostituendo nell'espressione precedente, si ha $v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a \cdot d\zeta \Rightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a \cdot d\zeta$

Velocità ed accelerazione

- Ricordando che sia la velocità, sia l’accelerazione sono grandezze vettoriali, da quanto visto possiamo affermare che la velocità e l’accelerazione possono essere espresse come segue

Velocità ed accelerazione

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt^2} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{cases}$$