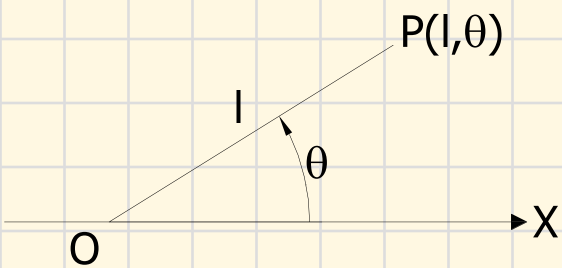
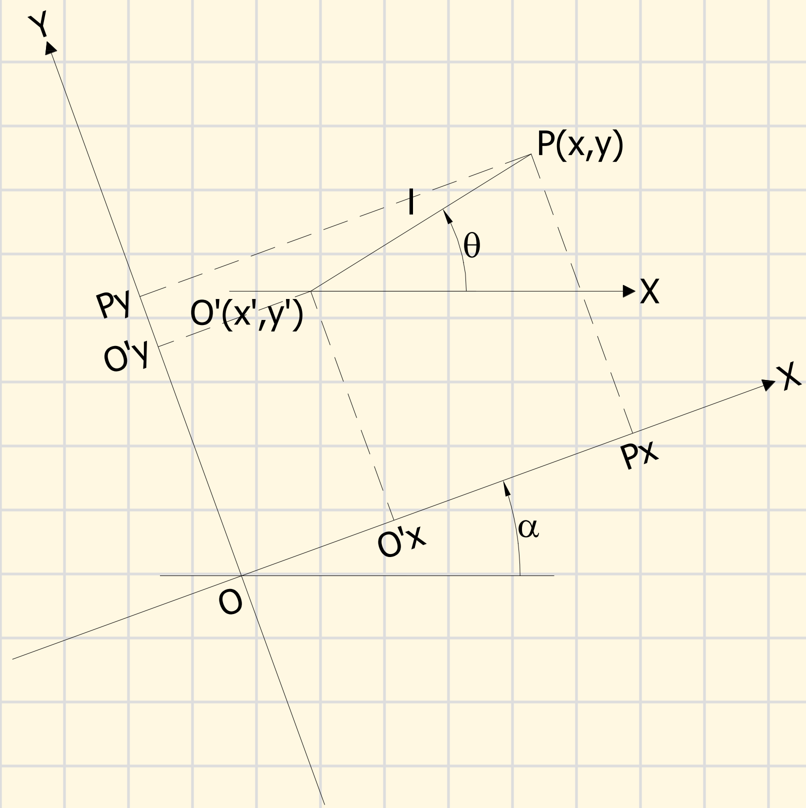
Trasformazione di coordinate

- Note le coordinate di un punto in coordinate polari P(l,θ) determinare le coordinate dello stesso punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente origine differente dall'origine del sistema di riferimento polare e asse delle ascisse ruotato di un angolo α rispetto al corrispondente asse nel sistema di riferimento polare



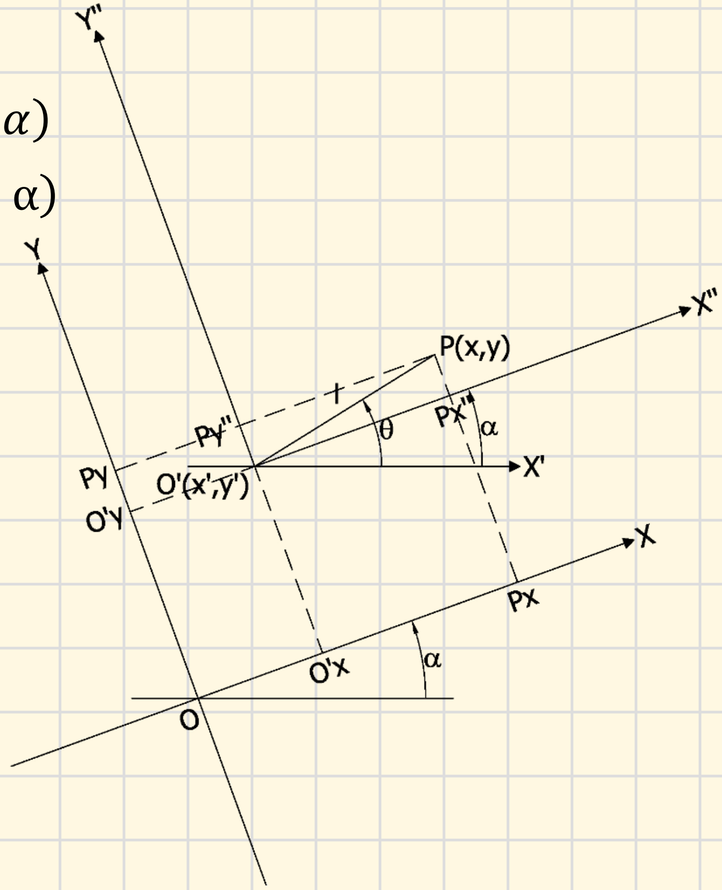


Trasformazione di coordinate

- Costruiamo un ulteriore sistema di riferimento cartesiano ortogonale, avente gli assi paralleli al sistema di riferimento rispetto al quale desideriamo determinare le coordinate del punto P, ma con origine coincidente con l'origine del sistema di riferimento polare

$$x = \overline{OP}_x = \overline{O'P}_{x''} + \overline{OO'}_x = x' + l \cdot \cos(\theta - \alpha)$$

$$y = \overline{OP}_y = \overline{O'P}_{y''} + \overline{OO'}_y = y' + l \cdot \mathrm{sen}(\theta - \alpha)$$



Moto di un proiettile - 1

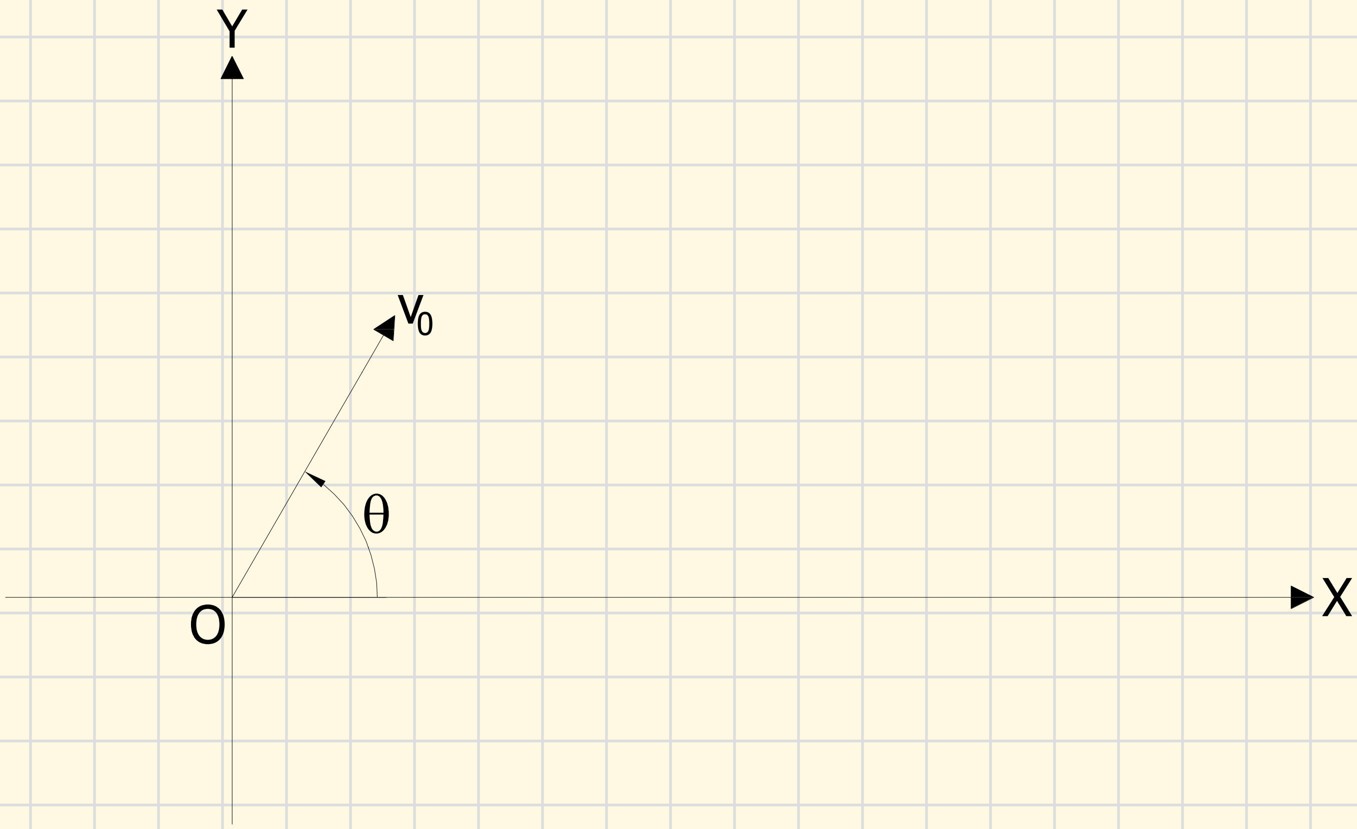
- Supponiamo che un cannone, in assenza di resistenza dell'aria, lanci un proiettile con velocità iniziale v_0 e con un angolo θ rispetto all'orizzontale

  Si vogliono determinare:

1. gittata (distanza del punto di caduta del proiettile dal punto di lancio)
2. valore dell'angolo θ per il quale è massima la gittata (a parità di velocità iniziale) e la gittata stessa in queste condizioni
3. durata del moto
4. velocità di impatto al suolo
5. l'istante di tempo in cui il proiettile raggiunge l'altezza massima, questa altezza e la corrispondente distanza dal punto di lancio

Moto di un proiettile - 2

- Introduciamo un sistema di riferimento nel piano avente l'asse X orizzontale, l'asse Y verticale tale che il vettore velocità iniziale giaccia sul piano XY e avente l'origine nel punto di origine del moto



Moto di un proiettile - 3

- Il proiettile sarà soggetto all'accelerazione di gravità ed alle condizioni iniziali indicate ovvero

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}} \Rightarrow \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} v_{x0} = v_0 \cdot \cos\theta_0 \\ v_{y0} = v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0 \\ v_{z0} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{array}$$

- Dall'osservazione delle componenti dell'accelerazione si desume che, ciascuna delle componenti del moto avrà le seguenti caratteristiche

$$\begin{array}{lll} a_x = 0 & \Rightarrow & \text{moto uniforme} \\ a_y = -g & \Rightarrow & \text{moto uniformemente accelerato} \\ a_z = 0 & \Rightarrow & \text{moto uniforme} \end{array}$$

Moto di un proiettile - 4

- Il moto avviene nel piano XY, per cui le componenti di posizione e velocità lungo l'asse Z sono uguali a zero
- Le componenti della posizione e velocità lungo gli assi X e Y sono, rispettivamente:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\theta_0 \cdot t \qquad v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta_0$$

$$y(t) = v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad v_y(t) = v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0 - gt$$

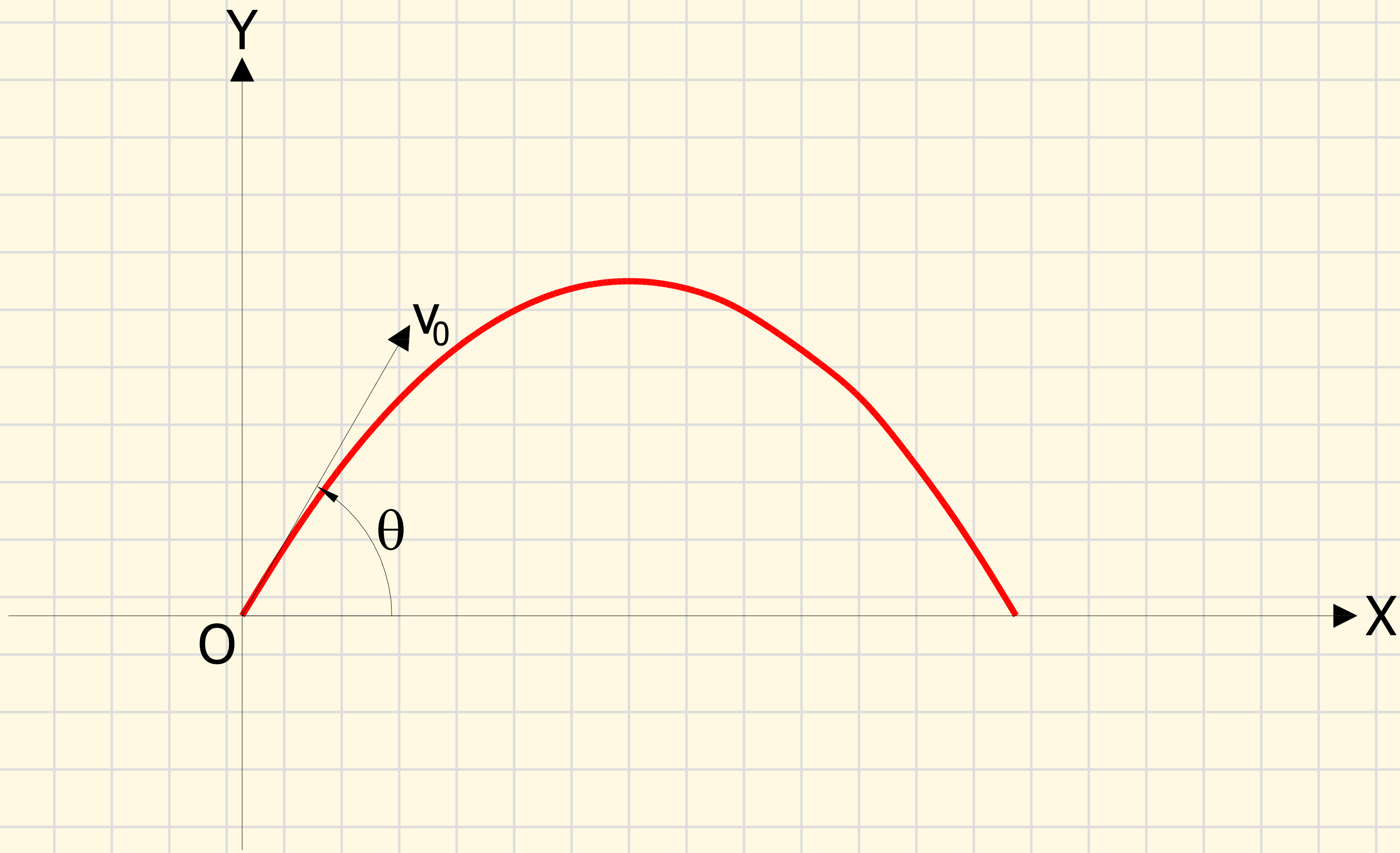
- Per ottenere l'equazione della traiettoria y(x) dobbiamo eliminare la variabile t dalle prime due espressioni

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta_0} \Rightarrow$$

$$y(x) = v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta_0} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{{v_0}^2 \cdot \cos^2\theta_0} \Rightarrow$$

$$x \cdot \tan\theta_0 - x^2 \cdot \frac{g}{2 \cdot {v_0}^2 \cdot \cos^2\theta_0} \text{ (parabola per l'origine)}$$

Moto di un proiettile - 5



Moto di un proiettile - 6

- **Quesito 1**
- Per calcolare distanza del punto di caduta del proiettile dal punto di lancio ovvero la gittata occorre determinare i punti in cui la traiettoria interseca l'asse delle ascisse X ovvero occorre risolvere l'equazione

$$y(x) = x \cdot \tan\theta_0 - x^2 \cdot \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\theta_0} = 0$$

- tale equazione ha due soluzioni

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\tan\theta_0 \cdot 2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\theta_0}{g} \Rightarrow x_2 = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \operatorname{sen}\theta_0 \cdot \cos\theta_0}{g}$$

- La gittata è data da

$$G = x_2 - x_1 = \frac{v_0^2 \cdot (2 \cdot \operatorname{sen}\theta_0 \cdot \cos\theta_0)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}2\theta_0}{g}$$

Moto di un proiettile - 7

- **Quesito 2**
- Per calcolare la massima gittata si fa riferimento all'equazione precedente e si osserva che la gittata (a parità di velocità iniziale) dipende solo dal sen(2θ), per cui sarà massimo se sen(2θ) è massimo ovvero

$$\text{sen}2\theta \text{ massimo} \Rightarrow \text{sen}2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \qquad (45^\circ)$$

- in queste condizioni la gittata massima G_{max} sarà

$$G_{max} = \frac{{v_0}^2 \cdot \text{sen}2\frac{\pi}{4}}{g} = \frac{{v_0}^2 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}}{g} = \frac{{v_0}^2}{g}$$

Moto di un proiettile - 8

- **Quesito 3**
- Per determinare la durata del moto dobbiamo determinare gli istanti di tempo in cui la quota del proiettile è nulla, utilizziamo l'espressione che lega la y al tempo

$$y(t) = v_0 \cdot sen\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$t \cdot \left(v_0 \cdot sen\theta_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \right) = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\theta_0}{g}$$

$$D = t_2 - t_1 = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\theta_0}{g}$$

Moto di un proiettile - 9

- **Questito 4**
- Per determinare la velocità al momento dell'impatto al suolo dobbiamo determinare la velocità all'istante di tempo t_2 in cui il proiettile raggiunge il suolo

$$t_2 = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0}{g}$$

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta_0 \qquad v_x(t_2) = v_0 \cdot \cos\theta_0$$

$$v_y(t) = v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0 - gt \qquad v_y(t_2) = v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0 - g\frac{2 \cdot v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0}{g}$$

$$\begin{matrix} v_x(t_2) = v_0 \cdot \cos\theta_0 \\ v_y(t_2) = -v_0 \cdot \mathrm{sen}\theta_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_x(t_2) = v_{x0} \\ v_y(t_2) = -v_{y0} \end{matrix}$$

rispetto alle condizioni iniziali, la velocità di impatto ha lo stesso modulo ma la sua componente verticale ha cambiato segno

Moto di un proiettile - 10

- **Quesito 5**
- Per determinare l'istante in cui il proiettile raggiunge l'altezza massima, osserviamo che in tale istante la componente verticale della sua velocità è nulla

$$v_y\left(t_{h-max}\right) = v_0 \cdot sen\theta_0 - g t_{h-max} = 0 \Rightarrow t_{h-max} = \frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g}$$

l'altezza del proiettile e la corrispondente distanza dal punto di lancio si determinano in funzione di $t_{h\text{-}max}$

$$x\left(t_{h-max}\right) = v_0 \cdot \cos\theta_0 \cdot \frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g}$$

$$y\left(t_{h-max}\right) = v_0 \cdot sen\theta_0 \cdot \frac{v_0 \cdot sen\theta_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{{v_0}^2 \cdot sen^2\theta_0}{g^2}$$

$$x\left(t_{h-max}\right) = \frac{{v_0}^2 \cdot sen2\theta_0}{2 \cdot g} \qquad y\left(t_{h-max}\right) = \frac{{v_0}^2 \cdot sen^2\theta_0}{2 \cdot g}$$

Dilatazione dei tempi

- La teoria della relatività ristretta, sviluppata da Albert Einstein nel 1905, è una riformulazione ed estensione delle leggi della meccanica
- È necessaria per descrivere eventi che avvengono ad alte energie e a velocità prossime a quella della luce, riducendosi alla meccanica classica negli altri casi
- La teoria si basa su due postulati:
  - le leggi della meccanica, dell'elettromagnetismo e dell'ottica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
  - Le onde elettromagnetiche (la luce in particolare) si propagano nel vuoto a velocità costante $c=2{,}998\cdot10^8\,\frac{m}{s}$ indipendentemente dallo stato di moto della sorgente o dell'osservatore (è la stessa per qualsiasi osservatore inerziale)

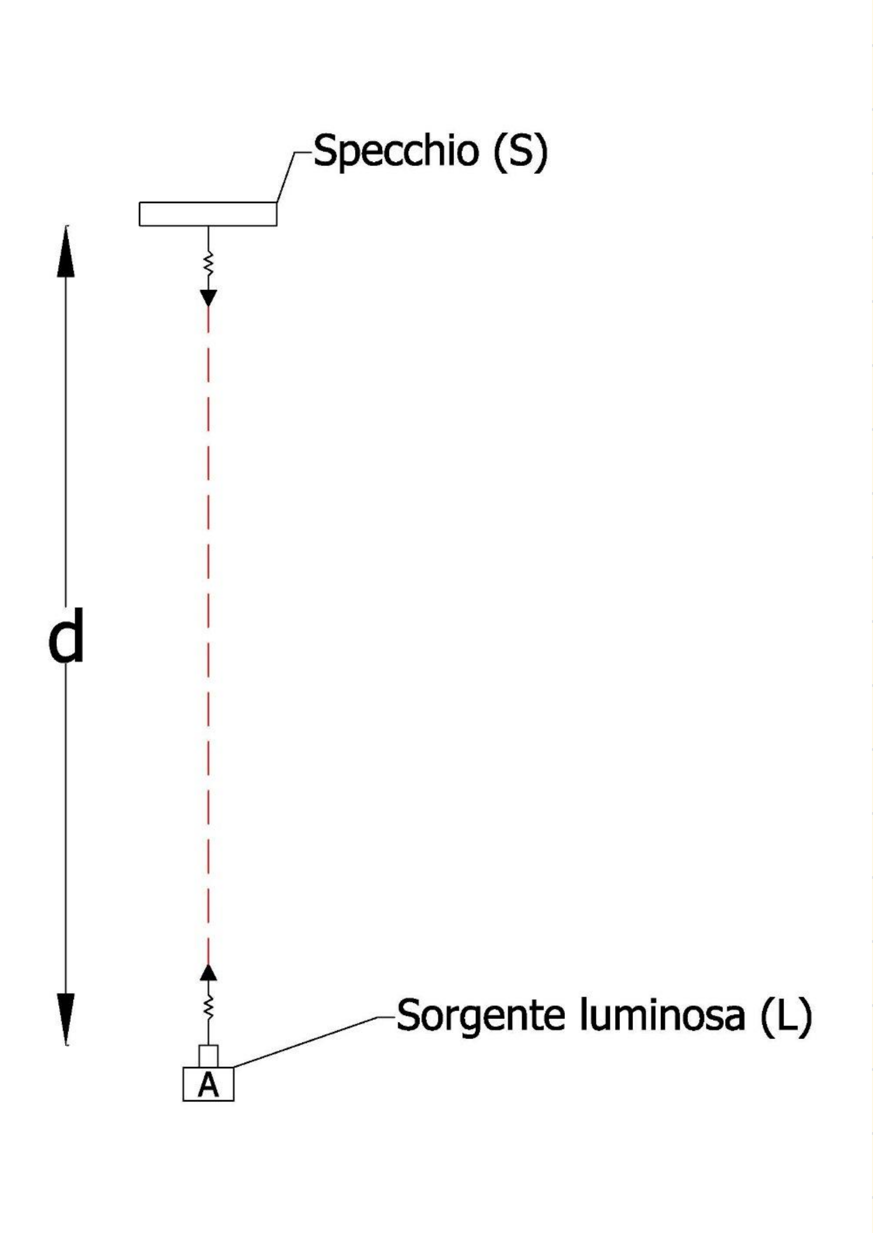
Dilatazione dei tempi

- Ammettere l'invarianza della velocità delle onde elettromagnetiche (della luce in particolare) ha una serie di conseguenze tra cui il dover rinunciare al concetto di tempo assoluto
- Questo significa che la variabile tempo (intesa come misura data da un orologio) ha valori che dipendono da quale osservatore sta facendo le misure
- Per verificare questa circostanza, vedremo come cambia, tra un osservatore e l'altro la durata di un fenomeno. Come fenomeno consideriamo, proprio, la propagazione di un segnale luminoso
- Il segnale luminoso, parte da una sorgente, raggiunge uno specchio, viene riflesso e ritorna nello stesso punto ovvero alla sorgente

Dilatazione dei tempi

- Supponiamo di avere un osservatore A solidale alla sorgente luminosa (e quindi solidale al punto di inizio e fine del fenomeno)
- Per questo osservatore, sia la sorgente luminosa sia lo specchio sono fermi e il percorso del raggio luminoso è quello riportato in figura

Dilatazione dei tempi



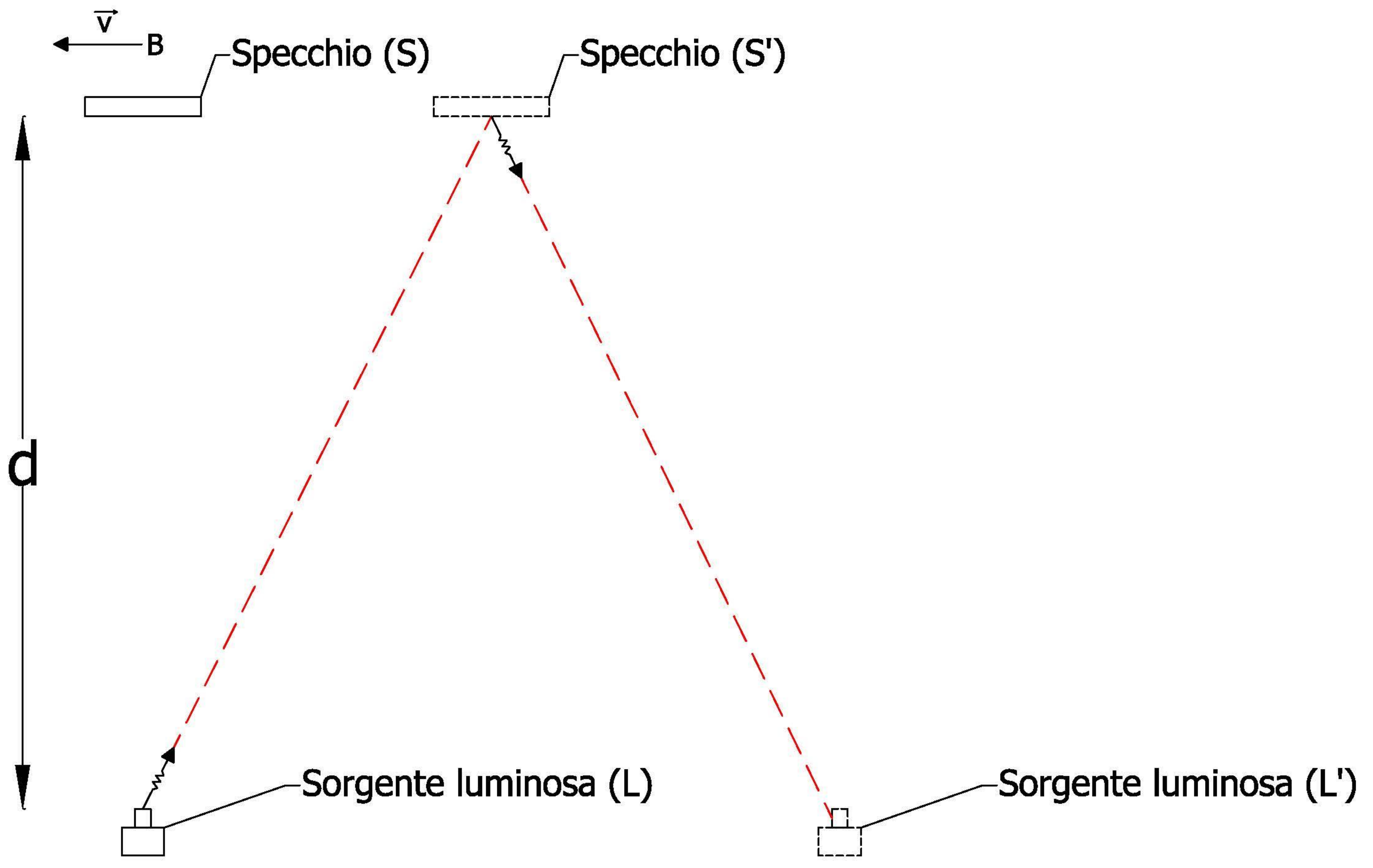
Dilatazione dei tempi

- Per l'osservatore A, il segnale luminoso (moto rettilineo uniforme):
- percorre uno spazio pari a $\overline{LS}+\overline{SL}=2\cdot d$
- in un tempo $\Delta t_A = \dfrac{\overline{LS}+\overline{SL}}{c} = \dfrac{2\cdot d}{c}$

Dilatazione dei tempi

- Supponiamo di avere un osservatore B in moto rettilineo uniforme con direzione perpendicolare alla direzione sorgente luminosa-specchio, verso sinistra in figura con modulo della velocità pari a v
- Per questo osservatore la sorgente luminosa e lo specchio si muovono con verso opposto rispetto al verso del suo moto (verso destra in figura)
- Per questo osservatore, quindi, mentre il segnale luminoso raggiunge lo specchio, questo si è spostato verso destra alla velocità v e, mentre il segnale luminoso ritorna dallo specchio verso la sorgente, anche questa si è spostata verso destra sempre con velocità v ed il percorso del raggio luminoso è riportato in figura

Dilatazione dei tempi



Dilatazione dei tempi

- Per l'osservatore B, il segnale luminoso (moto rettilineo uniforme):
- percorre uno spazio pari a $\overline{LS'}+\overline{S'L'}>\overline{LS}+\overline{SL}$
- in un tempo $\Delta t_B = \dfrac{\overline{LS'}+\overline{S'L'}}{c} > \Delta t_A$

Dilatazione dei tempi

- Per valutare di quanto aumenta l'intervallo di tempo misurato dall'osservatore B, dobbiamo valutare come le diverse distanze nella geometria del problema sono legate al valore assunto dalla velocità v
- Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo LSS':
$\overline{LS}^2+\overline{SS'}^2=\overline{LS'}^2$
- Dai risultati dell'osservazione di A ricaviamo: $\overline{LS}=\frac{\Delta t_A \cdot c}{2}$
- Dalla legge del moto di B, osservando che per B lo specchio si muove con velocità v in un tempo pari alla metà della durata dell'intero fenomeno, ricaviamo:
$\overline{SS'}=\frac{\Delta t_B \cdot v}{2}$
- Dai risultati dell'osservazione di B ricaviamo: $\overline{LS'}=\frac{\Delta t_B \cdot c}{2}$

Dilatazione dei tempi

- $\overline{LS}^2+\overline{SS'}^2=\overline{LS'}^2 \Rightarrow \left(\frac{\Delta t_A \cdot c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t_B \cdot v}{2}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t_B \cdot c}{2}\right)^2 \Rightarrow$

  $(\Delta t_A \cdot c)^2+(\Delta t_B \cdot v)^2=(\Delta t_B \cdot c)^2$
- L'incongnita per noi è Δt_B, per cui:

$$(\Delta t_B \cdot c)^2 -(\Delta t_B \cdot v)^2=(\Delta t_A \cdot c)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta t_B{}^2 \cdot \left(c^2-v^2\right)=\Delta t_A{}^2 \cdot c^2 \Rightarrow \Delta t_B{}^2=\frac{c^2}{c^2-v^2} \cdot \Delta t_A{}^2 \Rightarrow$$

$$\Delta t_B{}^2=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta t_A{}^2 \Rightarrow \Delta t_B=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta t_A \Rightarrow \Delta t_B=\frac{\Delta t_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Dilatazione dei tempi

- Per velocità v piccole rispetto alla velocità della luce c, la dilatazione dei tempi è insignificante ecco perché alle velocità alle quali noi siamo abituati questo effetto non si percepisce.
- Se si avessero velocità v paragonabili a quella della luce c (come nel caso delle particelle accelerate nei ciclotroni come quello del CERN) l'effetto è verificabile (ad esempio la vita media di particelle instabili che raggiungono velocità paragonabile a quella della luce si allunga)
- Se potessimo allontanarci dalla Terra alla velocità della luce, al nostro ritorno troveremmo gli abitanti della Terra invecchiati molto più di noi.