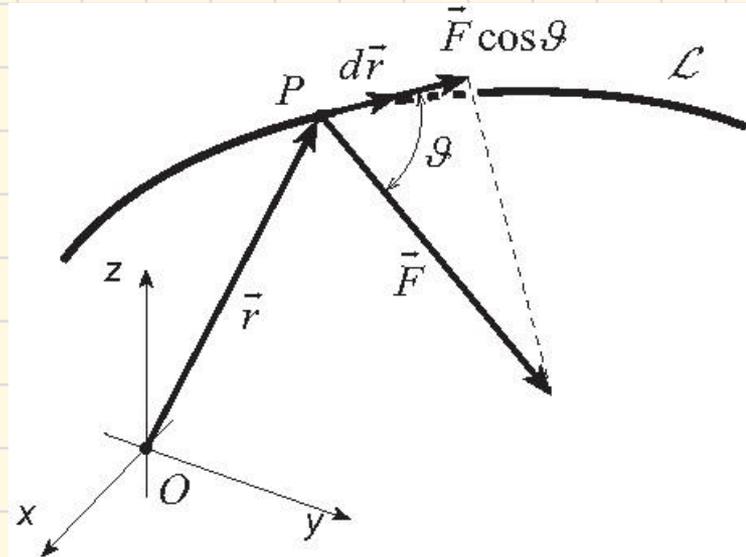


Lavoro di una forza

- Consideriamo un punto materiale P in moto lungo una curva \mathcal{L} per effetto di una forza \mathbf{F} . Sia \mathbf{r} il vettore posizione del punto P in un sistema di riferimento inerziale. In un intervallo di tempo infinitesimo dt il punto compie uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$.



- Si definisce lavoro elementare della forza \mathbf{F} agente sul punto materiale \mathbf{P} che si sposta di $d\mathbf{r}$, la quantità scalare:

$$dW \equiv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dr \cos \vartheta$$

Lavoro di una forza

- Ricordando che l'accelerazione \mathbf{a} del punto materiale può esprimersi come somma della componente tangenziale a_t e di quella normale a_n alla traiettoria, la forza \mathbf{F} può esprimersi come:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m(\hat{\mathbf{t}}a_t + \hat{\mathbf{n}}a_n) = \vec{\mathbf{F}}_t + \vec{\mathbf{F}}_n$$

per cui

$$dW \equiv \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{F}}_t + \vec{\mathbf{F}}_n) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{F}}_t + \vec{\mathbf{F}}_n) \cdot (\hat{\mathbf{t}} ds)$$

dove lo spostamento infinitesimo è stato espresso mediante l'ascissa curvilinea infinitesima ds ed il versore \mathbf{t} della tangente alla curva rappresentativa della traiettoria. Essendo \mathbf{F}_n perpendicolare alla curva e, quindi al versore \mathbf{t} , il suo contributo al lavoro elementare sarà nullo e si deduce che il lavoro elementare è uguale al prodotto dello spostamento infinitesimo per la sola componente della forza lungo tale spostamento

$$dW = F_t ds$$

Lavoro di una forza

- Se si volesse determinare il lavoro compiuto da una forza \mathbf{F} che sposta un punto materiale da una posizione iniziale P_1 ad una posizione finale P_2 lungo una curva \mathcal{L} si dovrebbero sommare tutti i contributi infinitesimi dW mediante un operatore che prende il nome di integrale di linea

$$W_{12} = \int_{\mathcal{L}}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\vec{r}$$

- Nel sistema SI il lavoro viene misurato in Joule (J):
1 J è il lavoro fatto da una forza di 1 N per uno spostamento di 1 m del suo punto di applicazione nella direzione della forza.
- Il lavoro gode della proprietà additiva: il lavoro della risultante di più forze è uguale alla somma dei lavori effettuati singolarmente da ciascuna delle forze.

Lavoro di una forza

- Riesaminando la relazione che definisce il lavoro elementare

$$dW \equiv \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = Fdr \cos \vartheta$$

si possono effettuare le seguenti considerazioni:

- se $\vartheta < 90^\circ$ il lavoro elementare dW è positivo e si definisce *lavoro motore*
- Se $90^\circ < \vartheta < 180^\circ$ il lavoro elementare dW è negativo e si definisce *lavoro resistente*
- se $\vartheta = 90^\circ$ il lavoro elementare dW è nullo

Potenza

- Per caratterizzare un sistema dal punto di vista energetico, oltre alla capacità di compiere un certo lavoro, è opportuno stabilire la rapidità con cui tale lavoro può essere eseguito

- si definisce *potenza media*, la quantità $P_{\text{media}} = \frac{W}{\Delta t}$

- si definisce *potenza istantanea*, la quantità $P = \frac{dW}{dt}$

ricordando la definizione di lavoro elementare si ha:

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} \Rightarrow P = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

- Nel sistema SI la potenza si misura in Watt ($W=J/s$)
- È possibile anche esprimere il lavoro come potenza per intervallo di tempo: da ciò deriva l'unità kilowattora (kWh) adoperata per la misura del lavoro elettrico

Energia cinetica

- Se consideriamo un punto materiale di massa m soggetto ad una forza \mathbf{F} , ricordando la definizione di lavoro elementare si ha:

$$\begin{aligned}dW &\equiv \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} d\vec{\mathbf{r}} = m \cdot d\vec{\mathbf{v}} \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = m \cdot d\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \\&= \frac{1}{2} m \cdot (d\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{v}}) \stackrel{\text{differenziale del prodotto}}{=} \frac{1}{2} m \cdot d(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \\&= \frac{1}{2} m \cdot dv^2 \stackrel{\text{se } m=\text{costante al variare di } v}{=} d\left(\frac{1}{2} mv^2\right)\end{aligned}$$

nel caso di uno spostamento finito del punto di applicazione della forza \mathbf{F} da P_1 a P_2 lungo la curva \mathcal{L} , si ha:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

Energia cinetica

- Per un punto materiale di massa m che si muove con velocità \mathbf{v} , la quantità

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

prende il nome di *energia cinetica* e si può scrivere:

$$W_{12} = E_{k2} - E_{k1}$$

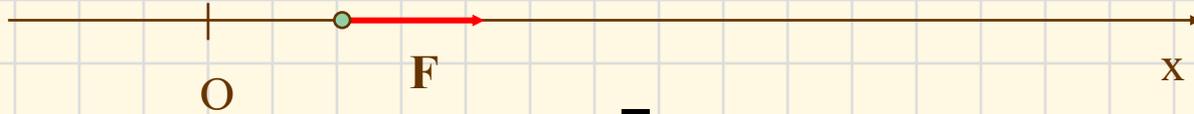
ovvero:

il lavoro fatto dalla risultante delle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

- Questa conseguenza della seconda legge di Newton prende il nome di *teorema dell'energia cinetica o teorema delle forze vive*
- L'unità di misura dell'energia cinetica è la stessa di quella del lavoro

Energia cinetica (caso particolare)

- Nel caso semplice di un punto materiale che si muove di moto rettilineo sotto l'azione di una forza costante parallela alla traiettoria (moto di caduta di un grave)



$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F}{m} = \text{cost. (moto unif. acc.)}$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

$$x - x_0 = v_{x0} \frac{v_x - v_{x0}}{a_x} + \frac{1}{2} a_x \left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x} \right)^2$$

Energia cinetica (caso particolare)

$$x - x_0 = \frac{2v_{x0}v_x - 2v_{x0}v_{x0} + v_x^2 + v_{x0}^2 - 2v_{x0}v_x}{2a_x} = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2a_x}$$

$$\frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{x0}^2}{2} = a_x(x - x_0)$$

$$\frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{x0}^2 = ma_x(x - x_0) = F(x - x_0)$$

ovvero, ancora:

il lavoro fatto dalla risultante delle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

Energia cinetica

- L'energia cinetica rappresenta la capacità che ha un corpo in movimento di compiere del lavoro ovvero di trasferire il movimento ad altri corpi (es. La corrente del fiume che fa muovere le macine di un mulino)

Lavoro ed energia cinetica

- Il modulo e la direzione della forza agente su un corpo non dipendono dal sistema di riferimento inerziale considerato, lo stesso non vale per lo spostamento.
- Il lavoro esercitato da una forza su un corpo dipende dal particolare sistema di riferimento utilizzato (forza agente su un corpo in moto a velocità costante: per un osservatore solidale con il corpo, il lavoro svolto dalla forza è nullo in quanto è nulla la velocità relativa)
- L'energia cinetica dipende dal sistema di riferimento (considerando differenti sistemi di riferimento inerziali in moto relativo tra loro con differenti velocità, si misurano velocità diverse per uno stesso corpo in moto)
- Nonostante la dipendenza di lavoro ed energia cinetica dal sistema di riferimento, il teorema dell'energia cinetica (o delle forze vive) resta valido per qualsiasi osservatore inerziale

Forze conservative

- Alcune forze (forza elastica, forza peso) sono caratterizzate dal fatto che il lavoro calcolato tra due punti dipende dalle sole coordinate di tali punti e risulta indipendente dal particolare percorso che congiunge i punti stessi
- Altre forze (forze di attrito) sono caratterizzate dal fatto che il lavoro calcolato tra due punti dipende dalla traiettoria seguita
- Le forze per le quali il lavoro non dipende dal cammino percorso sono dette *forze conservative* mentre quelle per le quali non vale tale proprietà sono dette *forze non conservative*.

Forze conservative

- Per le forze conservative il lavoro è esprimibile come differenza dei valori che assume una particolare funzione nei punti finale ed iniziale della traiettoria considerata.
- Nel caso in cui si invertano il punto iniziale e finale, ovvero si inverte la direzione di percorrenza della traiettoria, cambia solo il segno del lavoro eseguito.
- Un qualunque percorso chiuso può essere pensato come la somma di un percorso di andata tra due punti qualunque della traiettoria ed un percorso di ritorno tra gli stessi punti.
- Il lavoro eseguito da una forza conservativa lungo un qualunque percorso chiuso è nullo

Energia potenziale

- La funzione delle coordinate tramite cui è possibile esprimere il lavoro di una forza conservativa si definisce *energia potenziale*
- L'energia potenziale è, per la precisione, definita come una funzione delle coordinate spaziali del tipo $E_p(x,y,z)$ per la quale risulti che il lavoro effettuato da una forza conservativa per andare da un punto iniziale P_1 ad un punto finale P_2 è uguale alla variazione di energia potenziale tra il punto finale P_2 e quello iniziale P_1 cambiata di segno ovvero

$$W_{12} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

Conservazione energia meccanica

- Se consideriamo contemporaneamente l'espressione del lavoro mediante variazione di energia cinetica e quella mediante variazione di energia potenziale si ottiene la relazione

$$W_{12} = E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} \Rightarrow E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

- La somma dell'energia cinetica E_k e dell'energia potenziale E_p di un corpo soggetto ad una forza conservativa è detta *energia meccanica E*
- L'energia meccanica di un punto materiale in moto sotto l'azione di forze conservative si mantiene costante durante il moto, ossia si conserva.
- L'energia meccanica di un punto materiale in moto sotto l'azione di forze conservative e non conservative non rimane costante durante il moto e, in particolare, la sua variazione risulta pari al lavoro delle forze non conservative.

Lavoro ed energia

- I corpi possono scambiarsi l'energia:
 - Il lavoro rappresenta un modo attraverso cui i corpi si scambiano energia.
 - Se la risultante delle forze esterne compie un lavoro positivo (forza motrice, concorde con il moto), allora l'energia cinetica potenziale del punto materiale aumenta:
 - Si dice che *l'ambiente esterno ha compiuto un lavoro sul punto materiale* e che il punto materiale ha acquisito energia cinetica o potenziale dall'ambiente esterno.
 - Se la risultante delle forze esterne compie un lavoro negativo (forza resistente, opposta al moto), allora la sua energia cinetica o potenziale diminuisce:
 - Si dice che *il punto materiale ha effettuato del lavoro sull'ambiente esterno* a spese della sua energia cinetica o potenziale