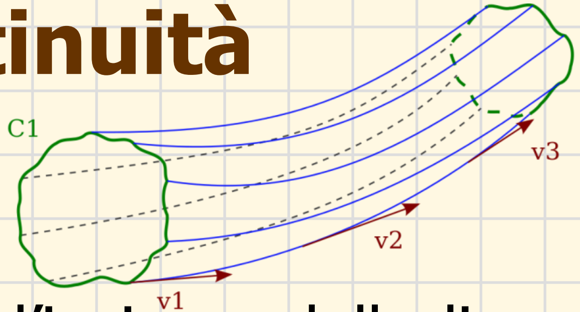
Viscosità e fluido ideale

- La viscosità è una grandezza fisica che indica la resistenza di un fluido allo scorrimento.
- La viscosità si può pensare come una misura della forza che occorre applicare ad uno strato piano di fluido affinché si muova con velocità v costante rispetto ad un piano considerato fisso (anche rappresentato da un altro strato piano di fluido)
- Un fluido si dice ideale quando ha massa volumica costante e coefficiente di viscosità nullo: la sua legge costitutiva, quindi, è legge di Pascal.
- Un fluido ideale, essendo costante la sua massa volumica, è incomprimibile.
- In un fluido ideale, essendo nulla la viscosità, non vi sono sforzi di taglio.

Moto stazionario di un fluido ideale

- Si parla di moto o flusso stazionario quando la velocità del fluido pur potendo variare da punto a punto del fluido, rimane costante nel tempo in ciascun punto.
- Se si definisce la linea di flusso come quella linea che è sempre tangente al vettore velocità di una particella elementare di fluido, in un fluido ideale in moto stazionario le linee di flusso coincidono con le linee di corrente e possono non essere rettilinee, ma sono costanti nel tempo.
- Per un flusso stazionario è verificata la conservazione della massa da cui si può ricavare l'equazione di continuità.

Equazione di continuità



- Definiamo un tubo di flusso come l'insieme delle linee di flusso passanti per una curva chiusa che non sia, essa stessa, una linea di flusso.
- Dato un tubo di flusso di sezioni S_1 ed S_2 entro il quale le densità siano ρ_1 e ρ_2 e le velocità siano v_1 e v_2, la massa non può variare attraversando il tubo di flusso nella frazione di tempo dt:

$$dm_1 = \rho_1 \cdot S_1 \cdot (v_1 \cdot dt) = \rho_2 \cdot S_2 \cdot (v_2 \cdot dt) = dm_2 \Rightarrow$$

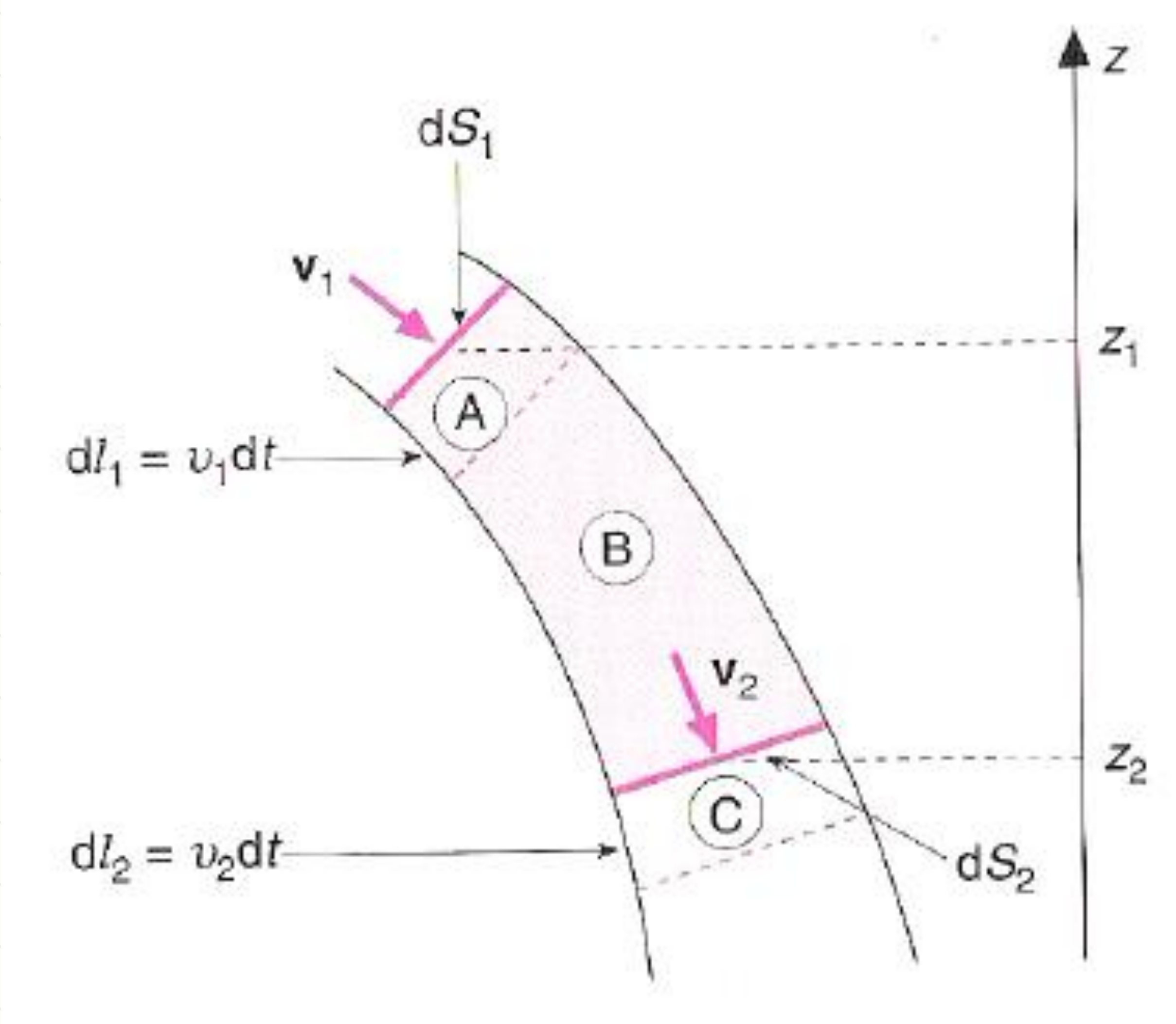
$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$$

- Nel caso di fluido ideale, essendo incomprimibile $\rho_1=\rho_2$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = \text{Costante:} \quad \text{"Portata" } Q$$

- In un condotto, la velocità media su una sezione S perpendicolare al condotto è inversamente proporzionale all'area della sezione

Teorema di Bernoulli



Teorema di Bernoulli

- Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima
- Le forze esercitate sul fluido contenuto fra le due sezioni dS_1 e dS_2 sono:
  - 1:forza di pressione dF_1 esercitata su dS_1: $dF_1=P_1dS_1$
  - 2:forza di pressione dF_2 esercitata su dS_2: $dF_2=P_2dS_2$
  - 3:forze sulle superfici laterali. Non vi è attrito per cui tali forze sono normali alle superfici (lavoro nullo)
  - 4:forza peso sul fluido
- Applichiamo il teorema delle forze vive per uno spostamento infinitesimo di fluido che avviene in un tempo infinitesimo dt durante il quale il fluido si sarà spostato di un tratto infinitesimo $dl_i=v_idt$

$$dL_1 = P_1 \cdot dS_1 \cdot dl_1 = P_1 \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt$$

$$dL_2 = -P_2 \cdot dS_2 \cdot v_2 \cdot dt \overbrace{=}^{dS_2 \cdot v_2 = dS_1 \cdot v_1} -P_2 \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt$$

Teorema di Bernoulli

Il lavoro della forza peso può essere calcolato come variazione di energia potenziale del fluido.

Possiamo interpretare il moto del fluido, con riferimento alla figura, come la porzione A che si sposta nella porzione C mentre la porzione B resta ferma:

l'energia potenziale del fluido in A e in C vale:

$$U_1 = \rho \cdot dS_1 \cdot dl_1 \cdot g \cdot z_1 \qquad U_2 = \rho \cdot dS_2 \cdot dl_2 \cdot g \cdot z_2$$

per cui il lavoro della forza peso vale:

$$dL_4 = -\Delta U = U_1 - U_2 = \rho \cdot dS_1 \cdot dl_1 \cdot g \cdot z_1 - \rho \cdot dS_2 \cdot dl_2 \cdot g \cdot z_2 =$$

$$= \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot g \cdot z_1 - \rho \cdot dS_2 \cdot v_2 \cdot dt \cdot g \cdot z_2 \overbrace{=}^{dS_2 \cdot v_2 = dS_1 \cdot v_1}$$

$$= \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot g \cdot z_1 - \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot g \cdot z_2 =$$

$$= \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

Teorema di Bernoulli

Il lavoro complessivo sarà:

$$dL = dL_1 + dL_2 + dL_4 =$$

$$= P_1 \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt +$$

$$- P_2 \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt +$$

$$+ \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot g \cdot (z_1 - z_2) \Rightarrow$$

$$dL = (P_1 - P_2) \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt + \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

Il lavoro appena determinato, per il teorema delle forze vive, dovrà essere uguale alla variazione di energia cinetica del fluido che passa dalla porzione A alla porzione C

$$dK = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dS_2 \cdot v_2 \cdot dt \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot v_1^2 \quad \overbrace{\Rightarrow}^{dS_2 \cdot v_2 = dS_\backslash \cdot v_\backslash}$$

$$dK = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Teorema di Bernoulli

$$dL = (P_1 - P_2) \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt + \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot g \cdot (z_1 - z_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right) = dK \Rightarrow$$

$$P_1 - P_2 + \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right) \Rightarrow$$

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 = \cos t.$$

La somma della pressione, dell’energia potenziale per unità di volume e dell’energia cinetica per unità di volume è costante

$$\frac{P}{\rho \cdot g} + \cdot z + \frac{v^2}{2g} = \cos t.$$

La somma dell’altezza piezometrica, geometrica e cinetica è costante

Teorema di Torricelli

- Un fluido che fuoriesce da un foro molto piccolo praticato su una parete di un serbatoio molto grande.
- In tali condizioni, la superficie libera del fluido contenuto nel serbatoio avrà una velocità che possiamo assimilare a nulla

Applicando il teorema di Bernoulli si ha:

$$P_0 + \rho \cdot g \cdot z_{lib} = P_0 + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = 2 \cdot (g \cdot z_{lib} - g \cdot z) \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (z_{lib} - z)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Il modulo della velocità di un fluido che fuoriesce da un piccolo foro è uguale a quella di un grave in caduta libera sotto l'azione di un campo gravitazionale.

Effetto venturi

- Consideriamo una generica condotta che presenti una diminuzione della sua sezione e chiamiamo S_1 l'area maggiore e S_2 l'area minore.
- Dall'equazione di continuità applicata alla condotta sappiamo che in condizioni stazionarie la portata entrante nella prima sezione deve essere esattamente uguale a quella entrante nella seconda.
- In caso di fluido a densità costante (incomprimibile) poiché la portata volumetrica può essere espressa come prodotto della velocità del fluido per la sezione in cui passa, si deduce che c'è un aumento di velocità v_2 nella sezione S_2 di area minore rispetto alla velocità v_1 nella sezione S_1 di area maggiore
- Supponendo che non esista una differenza di quota tra le due sezioni l'equazione di Bernoulli diventa

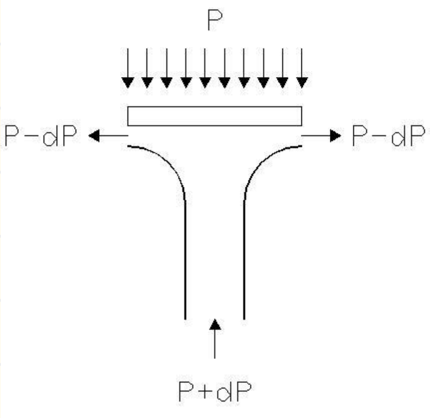
$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \cos t.$$

Effetto venturi

- Quindi, che all'aumentare della velocità del fluido si crea necessariamente una diminuzione della pressione interna al fluido stesso.
- La pressione p_2 nella sezione S_2 di area minore è inferiore alla pressione p_1 nella sezione S_1 di area maggiore.
- La diminuzione della pressione nel fluido, nella zona del tubo caratterizzata da minore sezione e maggiore velocità, può essere giustificata pensando che la pressione venga spesa per accelerare il fluido.
- La differenza di pressione ai capi della strozzatura è necessaria per accelerare il fluido garantendo così la costanza del flusso (equazione di continuità)

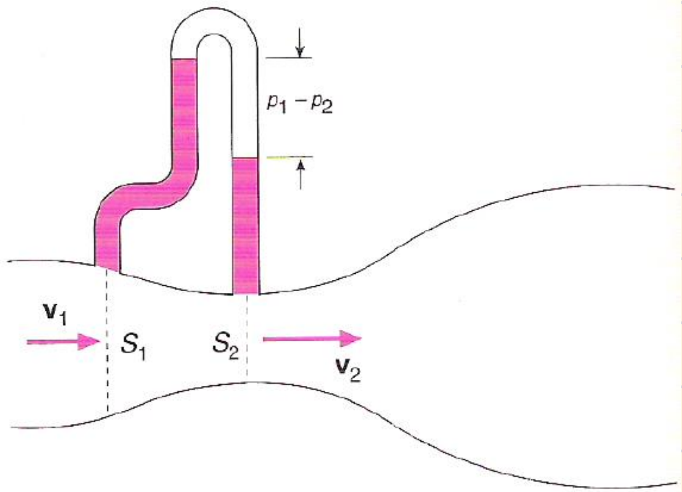
Paradosso idrodinamico

- L'effetto Venturi viene anche chiamato paradosso idrodinamico poiché si può pensare che la pressione aumenti in corrispondenza delle strozzature; tuttavia, per la legge della portata, in corrispondenza delle strozzature è la velocità ad aumentare.



- Considerando un tubo che finisce contro una piastra, il fluido ha una pressione leggermente superiore alla pressione atmosferica, la strozzatura tra tubo e piastra farà aumentare la velocità a scapito della pressione del fluido.
- Se la pressione scende al di sotto della pressione atmosferica, la piastra tenderà ad andare verso il tubo anziché ad allontanarvisi

Tubo di Venturi



- Il tubo di Venturi serve per misurare la portata di una condotta sfruttando l'effetto Venturi.
- Calcola la velocità media del fluido partendo dalla relazione esistente tra questa grandezza e la pressione.
- Dalla velocità si determina la portata volumetrica usando la relazione Q=vS
- Consideriamo un tubo di Venturi ed applichiamo il teorema di Bernoulli (l'altezza geometrica è costante)

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow$$

Tubo di Venturi

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\left(v_2^2 - v_1^2\right) \overbrace{=}^{v_1\cdot S_1 = v_2\cdot S_2} \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\left[v_2^2 - v_2^2\cdot\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2\cdot\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\rho}}\cdot S_1\cdot\sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}}$$

Ricordando che Q=vS e che, stante l'equazione di continuità, la portata è costante in ogni punto del condotto, tale portata è pari a

$$Q_2 = v_2\cdot S_2 = Q = \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\rho}}\cdot \underbrace{S_1\cdot S_2\cdot\sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}}}_{\cos t.}$$